UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI SALERNO
C.d.L. in INGEGNERIA GESTIONALE
Ricerca Operativa
12 Gennaio 2009
Prof. Saverio Salerno

Compito A

1. Risolvere i seguenti problemi:

   (a) stabilire se il vettore $(3, 2, 0)$ è combinazione convessa di $u_1 = (3, 0, 6)$ e $u_2 = (3, 3, -3)$;
   (b) per il poliedro
   $$S = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 2\right\},$$
   stabilire se la direzione $d = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ è ammissibile in $\overline{x} = (0, 0)^T$.

2. Si consideri il poliedro:
   $$S = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 - 2x_1 \leq 0,\ x_2 - x_1 \geq 0,\ x_2 + x_1 \geq 0\right\}.$$
   Individuare tutti i possibili vertici ed i vincoli attivi per ogni vertice.

3. Usando il metodo del simplesso, risolvere il seguente problema di programmazione lineare:
   $$\begin{gathered} \max x_1 + x_2, \\ x_1 + x_3 = 2, \\ x_2 \leq 3, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{gathered}$$
   In merito alla soluzione determinata, rispondere alle seguenti domande, motivando adeguatamente le risposte:

   (a) è possibile, dalla conoscenza della soluzione ottima del problema assegnato, capire qual è la soluzione ottima del problema di programmazione lineare intera associato?
   (b) la soluzione ottima del problema è unica?
   (c) la soluzione ottima del problema è degenere?
   (d) (*facoltativo*) discutere come sia possibile trovare geometricamente la soluzione ottima ottenuta col metodo del simplesso.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI SALERNO
C.d.L. in INGEGNERIA GESTIONALE
Ricerca Operativa
12 Gennaio 2009
Prof. Saverio Salerno

Compito B

1. Risolvere i seguenti problemi:

   (a) stabilire se il vettore $(3, 1, 4)$ è combinazione convessa di $u_1 = (3, 0, 6)$ e $u_2 = (3, 3, -3)$;
   (b) per il poliedro

   $$S = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1,\ x_2 - x_1 \geq 0\right\},$$

   stabilire se la direzione $d = (-3, 0)^T$ è ammissibile in $\overline{x} = (0, 1)^T$.

2. Per il poliedro:

   $$S = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 + x_1 \leq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\right\},$$

   rispondere alle seguenti domande:

   (a) qual è il numero massimo di vertici?
   (b) quali sono i vertici?
   (c) quanti vincoli sono attivi in ogni vertice?

3. Usando il metodo del simplesso, risolvere il seguente problema di programmazione lineare:

   $$\begin{aligned} &\max x_2, \\ &2x_1 + x_3 = 1, \\ &x_2 + x_4 = 2, \\ &x_{1,2,3,4} \geq 0. \end{aligned}$$

   In merito alla soluzione determinata, rispondere alle seguenti domande, motivando adeguatamente le risposte:

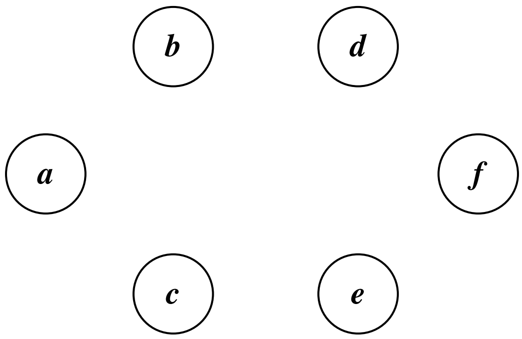
   (a) si può affermare che sicuramente la soluzione ottima del problema è unica?
   (b) la soluzione ottima del problema è degenere?
   (c) (*facoltativo*) discutere come sia possibile trovare geometricamente la soluzione ottima ottenuta col metodo del simplesso. Nel caso la soluzione del problema non sia effettivamente unica, indicare un'altra possibile soluzione ottima.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI SALERNO
C.d.L. in INGEGNERIA GESTIONALE
Ricerca Operativa
5 Febbraio 2009
Prof. Saverio Salerno

1. Sia dato un grafo orientato $G(V, E)$, caratterizzato da 6 nodi ($V = \{a, b, c, d, e, f\}$) e 9 archi. A ciascun arco è associato un costo secondo la seguente tabella:

Arco	(a,b)	(a,c)	(b,d)	(b,e)	(c,b)	(d,f)	(e,c)	(e,d)	(f,e)
Costo	11	4	2	3	6	2	4	11	13

   (a) Disegnare il grafo della rete completando lo schema riportato nella figura:



   (b) Stabilire se il grafo è aciclico o ciclico applicando il criterio della numerazione dei nodi.

   (c) Applicando l'algoritmo di Dijkstra, determinare e disegnare l'albero dei cammini minimi dal nodo a a tutti gli altri nodi.

2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{gathered} \max x_2, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{gathered}$$

   (a) Determinare la soluzione applicando il metodo del simplesso;

   (b) specificare se la soluzione, determinata al punto precedente, è degenere, motivando adeguatamente la risposta;

   (c) supponendo di aggiungere al problema di partenza i vincoli

$$-x_1 + 2x_2 \leq 1, \quad -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 3,$$

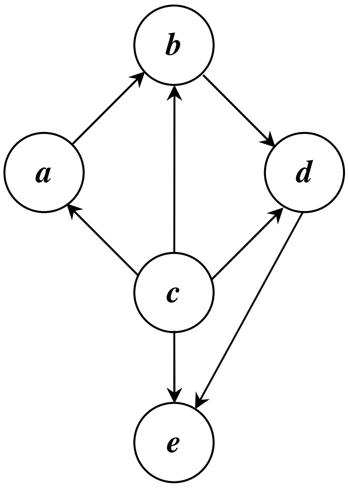
   qual è la nuova soluzione ottima $x^* = (x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*)^T$? La nuova soluzione x^* è degenere?

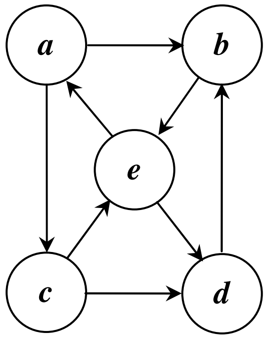
3. Sia $x^* = (1, 1, 0, 0)^T$ una soluzione di base ammissibile per un problema di programmazione lineare e sia $(\gamma_1, \gamma_2)^T = (-1, 0)^T$ il vettore dei costi ridotti associato alle variabili fuori base x_3 e x_4. Se il valore della funzione obiettivo in x^* è $z(x^*) = 10$, stabilire qual è il valore della funzione obiettivo in $\overline{x} = (1, 1, 2, 2)$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI SALERNO
C.d.L. in INGEGNERIA GESTIONALE
Ricerca Operativa
27 Febbraio 2009
Prof. Saverio Salerno

1. Risolvere i seguenti problemi:

   (a) Applicando il criterio di numerazione dei nodi, spiegare se i grafi della figura seguente sono ciclici o aciclici.





   (b) Si consideri una soluzione ammissibile di base $\overline{x} = (0, 1, 2, 1, 0)^T$ per la quale il valore della funzione obiettivo risulta essere $z(\overline{x}) = 14$, e siano $\gamma_1 = 3$ e $\gamma_2 = 4 + h$ i costi ridotti associati alle variabili fuori base x_1 e x_5. Determinare il valore di h per il quale la funzione obiettivo, calcolata in $\widehat{x} = (0, 1, 0, 1, 1)^T$, ha valore 1.

2. Risolvere il seguente problema di programmazione lineare usando il metodo del simplesso:

$$\begin{gathered} \max\ 5x_1 + 5x_2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{gathered}$$

   Precisare, infine, se la soluzione ottenuta risulta essere unica.

3. Si consideri il poliedro descritto dal seguente sistema:

$$\begin{gathered} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ -x_1 - 3x_3 = 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{gathered}$$

   Rispondere alle seguenti domande, motivando esaurientemente le risposte:

   (a) il punto $\left(0, 3, -\frac{4}{3}\right)^T$ appartiene al poliedro;
   (b) il punto $\left(-3, 0, -\frac{1}{3}\right)^T$ è un vertice;
   (c) la seconda e la terza colonna della matrice dei coefficienti formano una base di $\mathbb{R}^2$;
   (d) il punto $(-4, -1, 0)^T$ è una soluzione di base;
   (e) il poliedro non ha vertici.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI SALERNO
C.d.L. in INGEGNERIA GESTIONALE
Ricerca Operativa
16 Aprile 2009
Prof. Saverio Salerno

1. Sia dato il poliedro:

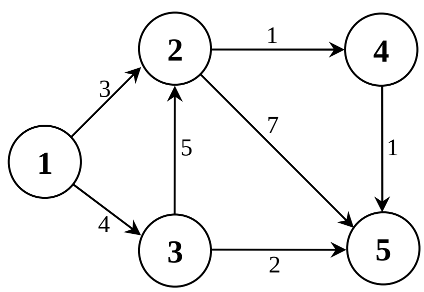
$$S = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \right\}.$$

   (a) Rappresentare graficamente S;

   (b) si verifichi che $\overline{x} = (0, 1)^T$ è un punto ammissibile;

   (c) stabilire se la direzione $d = (1, 0)^T$ è ammissibile in $\overline{x}$.

2. Si consideri la rete in figura, dove ad ogni arco è associato un costo positivo. Usando l'algoritmo di Dijkstra, determinare e disegnare l'albero dei cammini minimi dal nodo 1 verso tutti gli altri nodi.



3. Usando il metodo del simplesso, risolvere il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} &\max\ 10x_1, \\ &2x_1 + x_2 \leq 2, \\ &3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ &x_{1,2} \geq 0. \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI SALERNO
C.d.L. in INGEGNERIA GESTIONALE
Ricerca Operativa
11 Giugno 2009
Prof. Saverio Salerno

1. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{gathered} \max\ 2x_1 + 3x_2, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 15, \\ 9x_1 + 12x_2 \leq 48, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

   (a) determinare graficamente la soluzione del problema assegnato, specificando qual è l'equazione che descrive le curve di livello della funzione obiettivo;
   (b) nell'ipotesi che le variabili x_1 e x_2 siano entrambe intere, calcolare la soluzione del problema usando l'algoritmo del branch and bound.

2. Specificare qual è il numero effettivo delle soluzioni di base ammissibili (SBA) per il poliedro descritto dal sistema:

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3. \end{gathered}$$

   Indicare, infine, qual è il numero di vincoli attivi per ogni SBA.

3. Determinare il duale del problema di programmazione lineare:

$$\begin{gathered} \max\ 2x_1 + 4x_2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

4. Si consideri il poliedro convesso in forma standard definito da:

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4. \end{gathered}$$

   In merito alla soluzione ammissibile che si ottiene considerando in base x_1 e x_2, determinare la matrice dei vincoli attivi.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI SALERNO
C.d.L. in INGEGNERIA GESTIONALE
Ricerca Operativa
9 Luglio 2009
Prof. Saverio Salerno

1. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{gathered} \max x_1 + x_2, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ 2x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

   (a) Determinare la soluzione del problema usando il metodo del simplesso;

   (b) risolvere il problema graficamente, dimostrando che la soluzione ottenuta è la stessa determinata al punto (a);

   (c) usando l'algoritmo del branch and bound e supponendo che, oltre ai vincoli assegnati, x_1 e x_2 siano intere, risolvere il problema di programmazione lineare intera ottenuto.

2. Stabilire se il poliedro descritto dalle equazioni:

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 = 2, \\ x_1 - x_4 = 2, \\ x_{1,2,3,4} \geq 0, \end{gathered}$$

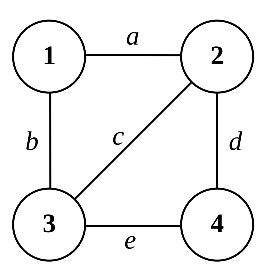
   ha soluzioni ammissibili di base degeneri.

3. Si consideri il poliedro convesso in forma standard definito da:

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ &x_1 + x_3 - x_4 = 2, \\ &x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

   In merito alla soluzione ammissibile che si ottiene considerando in base x_1 e x_2, determinare le direzioni ammissibili del poliedro.

4. Determinare la matrice di incidenza nodi-lati del grafo rappresentato in figura:



UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI SALERNO
C.d.L. in INGEGNERIA GESTIONALE
Ricerca Operativa
10 Settembre 2009
Prof. Saverio Salerno

1. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{gathered} \max \tfrac{1}{10}x_1 + \tfrac{1}{10}x_2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{gathered}$$

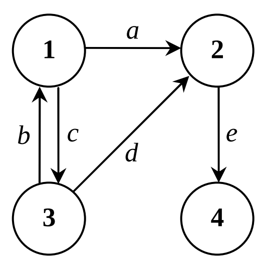
   (a) Calcolare la soluzione x^* del problema usando il metodo del simplesso;

   (b) risolvere nuovamente il problema con l'aggiunta del vincolo $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, stabilendo se la nuova soluzione determinata coincide ancora con x^*.

2. Senza usare il metodo del simplesso, stabilire qual è la soluzione del seguente problema:

$$\begin{gathered} \min -x_1 - x_2 + x_3, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, ..., 4. \end{gathered}$$

3. Determinare la matrice di incidenza nodi-archi del grafo rappresentato in figura:



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
C.d.L. in INGEGNERIA GESTIONALE
Ricerca Operativa
1° Ottobre 2009
Prof. Saverio Salerno

1. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max \tfrac{1}{2}x_1 + x_2,$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_4 = 6,$$
$$x_{1,2,3,4} \geq 0.$$

Determinare la sua soluzione x^* col metodo del simplesso in merito alle seguenti indicazioni:

(a) per la prima iterazione, considerare in base le variabili x_1 e x_3;

(b) se c'è arbitrarietà di scelta per l'entrata (risp. uscita) di due variabili x_i e x_j, scegliere la variabile per cui $i < j$ (risp. $i > j$).

Dopo aver calcolato x^*, rispondere alle seguenti domande, motivando esaurientemente le risposte:

- la soluzione x^* è degenere?
- Quanti vincoli sono attivi in x^*?
- È possibile determinare una coppia di variabili in base a cui corrisponde una soluzione ottima per la quale il vettore dei costi ridotti ha qualche componente negativa?

2. Determinare il duale del seguente problema:

$$\max x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 1,$$
$$3x_2 + 4x_3 \leq 2,$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4,$$
$$x_i \geq 0, \quad i = 1, ..., 4.$$

3. Determinare la lista di adiacenze del grafo $G(V, E)$ avente rappresentazione estensiva:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$E = \{(1,2), (1,3), (3,2), (2,4), (3,5), (4,5)\}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI SALERNO
C.d.L. in INGEGNERIA GESTIONALE
Ricerca Operativa
29 Ottobre 2009
Prof. Saverio Salerno

1. Stabilire se esiste un valore $h \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{13}{9}\right)$ è una combinazione convessa dei vettori $(1, -1, 3)$, $\left(h, -h, \frac{2h+1}{3}\right)$ e $(2h, 0, 1)$.

2. Si consideri il problema P di programmazione lineare:

$$\begin{gathered} \min -3x_1 - x_2, \\ -x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{gathered}$$

   (a) Risolvere P graficamente, specificando se è illimitato;

   (b) determinare il duale D di P;

   (c) risolvere D graficamente, e stabilire se è illimitato o impossibile.

3. Determinare il valore più piccolo dello scalare k per cui il poliedro

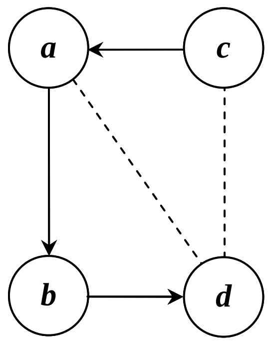
$$P = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 2,\ x_1 \geq 0,\ 0 \leq x_2 \leq 3,\ x_3 \geq 0\right\}$$

   ha intersezione non vuota con l'iperpiano

$$L = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : -x_1 - x_2 = k\right\}.$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
C.d.L. in INGEGNERIA GESTIONALE
Ricerca Operativa
26 Novembre 2009
Prof. Saverio Salerno

1. Dato il grafo in figura, determinare il verso delle frecce relative agli archi tratteggiati in modo tale che la corrispondente rete non abbia cicli. Dimostrare l'aciclità del grafo ottenuto usando il criterio di numerazione dei nodi.



2. Individuare gli intervalli di concavità e convessità della funzione $f(x) = x \log x - x^2$.

3. Determinare massimi e minimi della funzione $f(x, y) = \sin x - \sin y$ sottoposta al vincolo $\varphi(x, y) = \frac{\pi}{2} - x - y$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

4. Risolvere il seguente problema di programmazione lineare con il metodo del simplesso:

$$\begin{gathered}\max 4x_1 + 3x_2,\\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 1,\\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 = 1,\\ x_i \geq 0,\ i = 1, ..., 5.\end{gathered}$$

Rispondere, infine, alle seguenti domande, motivando adeguatamente le risposte:

(a) la soluzione del problema è unica?

(b) quanti vincoli sono attivi nella soluzione del problema?