UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SALERNO
C.d.L. in INGEGNERIA GESTIONALE
Esercizi di Ricerca Operativa
Prof. Saverio Salerno
Corso tenuto nell'anno solare 2009

I seguenti esercizi sono da ritenersi di preparazione alla prova d'esame.
Si invitano gli studenti a segnalare eventuali errori riportati nelle soluzioni.

Domini di funzioni di due variabili

Determinare i domini delle seguenti funzioni di due variabili (le soluzioni sono alla fine del fascicolo):

1. $f(x,y) = \sqrt[4]{\frac{x^2+y^2-3}{3x^2-y^2}}$
2. $f(x,y) = \log\left(x^2y^2-4\right) + \log\left(16-x^2-y^2\right)$
3. $f(x,y) = \log(4-|x|-|y|) + \sqrt{x^2+y^2-4}$
4. $f(x,y) = \sqrt{y^4-2x^2}$
5. $f(x,y) = \left[\sin\left(y^2-4x\right)\right]^{|xy+x|}$
6. $f(x,y) = \sqrt{\frac{\arcsin(3x^2+2y^2-3)}{xy}}$
7. $f(x,y) = \sqrt{x^2-4xy+3y^2}$
8. $f(x,y) = \sqrt{\frac{x+3y^2}{2x^2-4y}}$

Soluzione grafica di problemi di PL

1. Risolvere graficamente il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{gathered}\min -x_1+\frac{5}{2}x_2,\\ 2x_1-2x_2\geq 7,\\ 2x_1\leq 7,\\ -2x_2\leq 7.\end{gathered}$$

Soluzione: $x_1 = \frac{7}{2}$; $x_2 = -\frac{7}{2}$.

2. Risolvere graficamente il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{gathered}\min x_2,\\ x_1+x_2\geq 0,\\ -8x_1+6x_2\geq 21,\\ 2x_2\leq 7.\end{gathered}$$

Soluzione: $x_1 = -\frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2}$.

3. Risolvere graficamente il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{gathered}\max\ 2x_1 + 2x_2,\\ x_1 - 2x_2 \geq 10,\\ 2x_1 + x_2 \leq 22,\\ x_1 + 4x_2 \leq 32,\\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.\end{gathered}$$

Soluzione: $x_1 = \frac{54}{5}$; $x_2 = \frac{2}{5}$.

4. Risolvere graficamente il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{gathered}\max\ 4x_1 - x_2,\\ x_1 + x_2 \leq 6,\\ x_1 - x_2 \geq 3,\\ -x_1 + 2x_2 \leq 2,\\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.\end{gathered}$$

Soluzione: $x_1 = 6$; $x_2 = 0$.

Vertici dei poliedri

1. Determinare algebricamente tutti i vertici del poliedro:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 3,\\ 3x_1 + x_2 \leq 4,\\ 4x_1 + x_2 \leq 5,\\ 5x_1 + x_2 \leq 6,\\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.\end{cases}$$

Soluzione: i vertici sono i punti $(0,0)$, $(0,3)$, $\left(\frac{6}{5},0\right)$, $(1,1)$.

2. Sia dato il seguente poliedro:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - x_2 \geq 2,\\ x_2 + x_3 = 4,\\ x_2 + x_4 = 11,\\ x_1 \geq 0.\end{cases}$$

Spiegare perchè le seguenti affermazioni sono errate:

a) il punto $(12,4,0,7)^T$ non è ammissibile;
b) il punto $(12,4,0,7)^T$ è vertice;
c) il punto $(14,5,-1,6)^T$ non è ammissibile;
d) il punto $(4,0,4,11)^T$ è vertice.

3. Determinare tutte le basi (ammissibili) e le soluzioni di base ammissibili del seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2,\\ x_1 \leq 2,\\ x_2 \leq 1,\\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.\end{cases}$$

Soluzione: ci sono 3 basi ammissibili non degeneri e 3 basi ammissibili degeneri.

4. Sia dato il poliedro $P(\tau)$, con $\tau \geq 0$, definito da:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + \tau x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = \tau, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Determinare per quali valori non negativi di τ il poliedro $P(\tau)$ ammette esattamente due soluzioni ammissibili di base (anche degeneri) e chiarire se sia possibile ottenerne tre. Determinare, inoltre, per quali valori non negativi di τ il poliedro $P(\tau)$ ammette $(0,0,1)^T$ come suo vertice.
Soluzione: $1 < \tau \leq 2$. Il poliedro $P(\tau)$ ammette $(0,0,1)^T$ come suo vertice per $\tau = 2$.

5. Si consideri il seguente poliedro:

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 9, \\ x \geq 0. \end{gathered}$$

Giustificare perchè, tra le seguenti affermazioni, risulta corretta solo la terza:

a) la prima e la seconda colonna della matrice dei vincoli formano una base ammissibile;
b) il punto $(1,1,0,0)^T$ è un vertice del poliedro;
c) il punto $(3,0,0,0)^T$ è un vertice del poliedro;
d) il poliedro può avere più di 6 vertici.

Metodo del simplesso

1. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min \ (2,-1,1,0,0)\,x,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$
$$x \in \mathbb{R}^5,\ x \geq 0.$$

Giustificare perchè, tra le seguenti affermazioni, risulta corretta solo la seconda:

a) la base costituita dalla quarta e quinta colonna soddisfa il criterio di ottimalità;
b) la base costituita dalla quarta e quinta colonna soddisfa il criterio di illimitatezza;
c) il vertice associato alla base costituita dalla quarta e quinta colonna è $(0,0,1,0,2)$;
d) la funzione obiettivo è limitata inferiormente nell'insieme ammissibile.

2. In un'iterazione del metodo del simplesso risulta $x_B = (x_1, x_3, x_5)^T$, $x_N = (x_2, x_6, x_7, x_4)^T$,

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Giustificare perchè, tra le seguenti affermazioni, risulta falsa solo la prima:

a) le variabili x_7 e x_4 sono candidate ad entrare in base;

b) non è soddisfatto il criterio di illimitatezza;

c) la soluzione di base corrente non soddisfa il criterio di ottimalità;

d) la prossima soluzione di base ammissibile sarà degenere.

3. Risolvere il seguente problema di PL con il metodo del simplesso:

$$\begin{gathered} \max\ x_1 + 9x_2 + x_3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15, \\ x \geq 0. \end{gathered}$$

Soluzione: $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = \dfrac{9}{2}$.

4. Risolvere il seguente problema di PL con il metodo del simplesso:

$$\begin{gathered} \min\ 80x_1 + 60x_2, \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x \geq 0. \end{gathered}$$

Soluzione: l'ottimo della funzione obiettivo vale $\dfrac{215}{3} \simeq 71.67$.

5. Risolvere il seguente problema di PL con il metodo del simplesso:

$$\begin{gathered} \min\ x_1 + 2x_2, \\ x_1 + 3x_2 \geq 11, \\ 2x_1 + x_2 \geq 9, \\ x \geq 0. \end{gathered}$$

Soluzione: $x_1 = \dfrac{16}{5}$, $x_2 = \dfrac{13}{5}$.

6. In merito al problema di PL che segue, verificare la falsità della seguente affermazione: "In una soluzione ammissibile di base ottima di un problema di PL (di minimo, in forma standard), i coefficienti di costo ridotto devono essere tutti non negativi".

$$\begin{gathered} \min\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1, \\ x \geq 0. \end{gathered}$$

Soluzione: riflettere sulle soluzioni di base ammissibili $(x_4, x_1, x_6)^T = (2, 1, 0)^T$ e $(x_4, x_1, x_3)^T = (2, 1, 0)^T$.

7. Sia dato il problema di PL:

$$\begin{gathered} \min\ -4x_1 + 9x_3 + 12x_4 - 5x_5 + 7x_6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 3, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 = 6, \\ -x_1 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 + x_6 = 5, \\ x \geq 0. \end{gathered}$$

a) Si verifichi che le variabili x_1, x_2 e x_3 individuano una base ottima;

b) si determini l'intervallo di valori entro cui può variare il coefficiente di costo c_2 (relativo alla variabile x_2) affinchè la soluzione determinata al punto precedente rimanga ottima. Se si sceglie c_2 maggiore dell'estremo superiore dell'intervallo sopra determinato, qual è la variabile candidata ad entrare in base?

c) Si determini l'intervallo di valori entro cui può variare il termine noto b_2 del secondo vincolo affinchè la base individuata da x_1, x_2 e x_3 rimanga ottima. Qual è l'espressione che lega il valore ottimo della funzione obiettivo a b_2?

Soluzione: b) $c_2 \in [-1, 2]$; se $2 < c_2 \leq 3$, la variabile candidata ad entrare in base è x_6; se $c_2 > 3$, la variabile con costo ridotto minore è x_6; c) $b_2 \in \left[\frac{21}{4}, 8\right]$; $z = 12 + 2b_2$.

Condizioni di KKT

1. Usando le condizioni di KKT, risolvere il seguente problema:

$$\begin{gathered} \max\ \log x_1 + 2\log x_2 + 3\log x_3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3000, \\ x_1 \geq 750, \\ x_2 \geq 1, \\ x_3 \geq 1. \end{gathered}$$

   Soluzione: $x_1 = 750$, $x_2 = 900$, $x_3 = 1350$.

2. Risolvere il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{gathered} \max\ x_1^2 + 3x_2, \\ x_2 \leq x_1 + 1, \\ x_1 \geq 0, \\ x_1 \leq 3, \end{gathered}$$

   usando le condizioni di KKT.
   Soluzione: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

3. Determinare il punto di intersezione dei piani:

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 9, \quad x_1 + 2x_2 = 3,$$

   più vicino al punto di coordinate $(3, -1, 2)$.
   Soluzione: il problema può essere formulato come problema di ottimizzazione vincolata in cui l'obiettivo è quello di minimizzare il quadrato della distanza tra il punto cercato e $(3, -1, 2)$:

$$\begin{gathered} \min\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 2)^2, \\ 9 - 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3 - x_1 - 2x_2 = 0. \end{gathered}$$

   Risolvendo il problema con le condizioni di KKT, si ottiene un punto di minimo globale che è $\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Massimi e minimi vincolati

Determinare e classificare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti delle seguenti funzioni $f(x,y)$ sotto i vincoli assegnati (per brevità, i punti di minimo e di massimo saranno denotati, rispettivamente, con m e M).

1. $f(x,y) = x^3 + 4xy^2 - 4x, \quad \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$
   Soluzione: $m = (1,0)\,;\ M = (-1,0)\,.$

2. $f(x,y) = x + y^2, \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2+y^2\right)^2 \le x^2\right\}.$
   Soluzione: $m = (-1,0)\,;\ M = (1,0)\,.$

3. $f(x,y) = \arctan(x+y)\,, \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \le 4\right\}.$
   Soluzione: $m = \left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right);\ M = \left(\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$

4. $f(x,y) = y^2 + xy, \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 4\right\}.$
   Soluzione: $m_{1,2} = (\mp 3, \pm 1)\,;\ M_{1,2} = (0, \pm 4)\,.$

5. $f(x,y) = xye^{-z^2}, \quad \varphi(x,y,z) = 4x^2 + y^2 - z^2 - 1.$
   Soluzione: $m_{1,2} = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{4}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right);\ M_{1,2} = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{4}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$

Teoria della dualità

Costruire i duali dei problemi di programmazione relativi alla prima sezione degli esercizi (risoluzione grafica). Confrontare che i valori della funzione obiettivo per il primale e per il duale siano gli stessi. Procedere con la risoluzione dei problemi duali mediante il metodo del simplesso. Effettuare anche la verifica grafica della soluzioni dei duali se sono formulati in $\mathbb{R}^2$.

Programmazione lineare intera

1. Determinare la soluzione del seguente problema di programmazione lineare intera con l'algoritmo del branch and bound:

$$\begin{gathered} \min -x_1 + x_2, \\ x_1 + x_2 \ge 0, \\ 2x_2 \le 3, \\ 2x_1 \le 5, \\ x_1 \text{ e } x_2 \text{ interi.} \end{gathered}$$

   Soluzione: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

2. Determinare la soluzione del seguente problema di programmazione lineare intera con l'algoritmo del branch and bound:

$$\begin{gathered} \max \frac{1}{2}x_1 + 2x_2, \\ -4x_1 + 6x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1 \text{ e } x_2 \text{ interi.} \end{gathered}$$

   Soluzione: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

3. Determinare la soluzione del seguente problema di programmazione lineare intera con l'algoritmo del branch and bound:

$$\begin{gathered}\max\ -1.7x_1 + 0.6x_2,\\ -5x_1 - 4x_2 \leq 5,\\ -5x_1 + 6x_2 \leq 30,\\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10,\\ x_2 \geq 0,\ x_1 \text{ e } x_2 \text{ interi.}\end{gathered}$$

   Soluzione: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

4. Determinare la soluzione del seguente problema di programmazione lineare intera con l'algoritmo del branch and bound:

$$\begin{gathered}\max\ x_2,\\ -x_1 + 3x_2 \leq 6,\\ 2x_1 + 4x_2 \leq 13,\\ x_1 \leq 2,\\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 \text{ e } x_2 \text{ interi.}\end{gathered}$$

   Soluzione: ottimo non unico. Si hanno i punti per i quali $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ e $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

5. Determinare la soluzione del seguente problema di programmazione lineare intera con l'algoritmo del branch and bound:

$$\begin{gathered}\max\ 2x_1 + 2x_2,\\ 2x_2 \leq 5,\\ 5x_1 - x_2 \leq 10,\\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 \text{ e } x_2 \text{ interi.}\end{gathered}$$

   Soluzione: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$.

Teoria dei grafi e cammini minimi

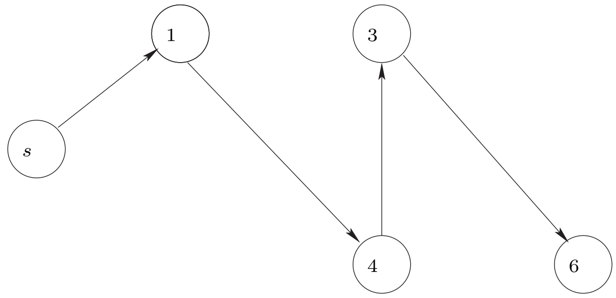
1. Sia dato un grafo orientato $G(V, E)$ caratterizzato da 8 nodi ($V = \{s, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$) e 13 archi. A ciascun arco è associato un costo secondo le seguenti tabelle:

Arco	$(s,1)$	$(s,2)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,5)$
Costo	1	4	2	4	1	4	6

Arco	$(3,6)$	$(4,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,7)$	$(7,5)$
Costo	1	1	5	9	1	2

   Determinare l'albero dei cammini minimi dal nodo s al nodo 6, applicando l'algoritmo di Dijkstra (**suggerimento**: l'algoritmo termina non appena il nodo 6 viene etichettato permanentemente).
   Soluzione: il grafico relativo al cammino minimo è quello riportato nella seguente figura.

Il costo del cammino complessivo è pari a 4.



2. Sia dato un grafo orientato $G(V, E)$ caratterizzato da 8 nodi ($V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$) e 14 archi. A ciascun arco è associato un costo secondo le seguenti tabelle:

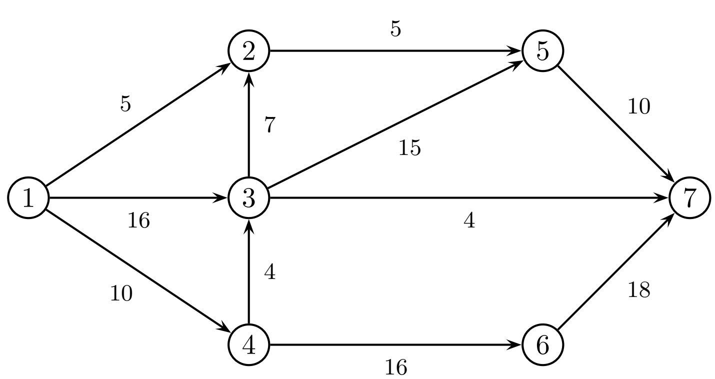
Arco	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,6)$	$(3,4)$	$(3,5)$
Costo	1	3	1	3	2	1	2

Arco	$(4,6)$	$(4,7)$	$(5,4)$	$(6,7)$	$(6,8)$	$(7,5)$	$(7,8)$
Costo	1	4	3	1	7	6	1

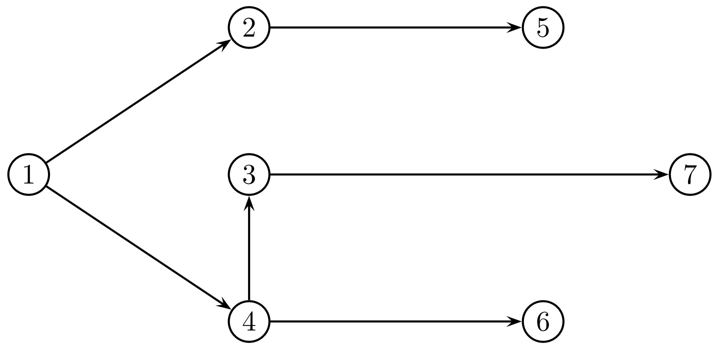
Determinare l'albero dei cammini minimi dal nodo 1 a tutti gli altri nodi.
Soluzione:
detto T il cammino, si ha che $T = \{(1,2),\ (2,3),\ (2,6),\ (3,4),\ (3,5),\ (6,7),\ (7,8)\}$.

3. Sia $G(V, E)$ un grafo orientato con
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
e
$$E = \{(1,3),\ (2,1),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,4),\ (3,5),\ (4,5),\ (4,6),\ (5,6)\}.$$
Sia
$$c^T = [c_{13} = 1,\ c_{21} = 1,\ c_{23} = 1,\ c_{24} = 4,\ c_{34} = 1,\ c_{35} = 7,\ c_{45} = 1,\ c_{46} = 6,\ c_{56} = 1]$$
il vettore dei costi. Applicando l'algoritmo di Dijkstra, determinare l'albero dei cammini minimi dal nodo 2 a tutti gli altri nodi.
Soluzione: detto T il cammino, si ha che $T = \{(2,1),\ (2,3),\ (3,4),\ (4,5),\ (5,6)\}$.

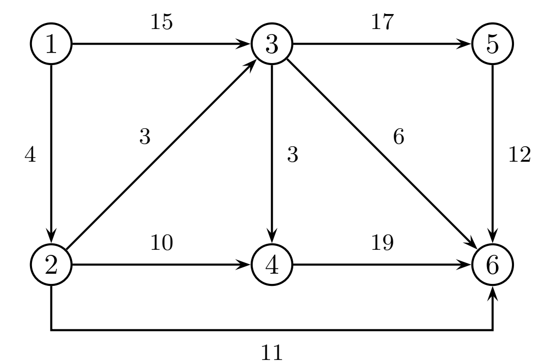
4. Applicando l'algoritmo di Dijkstra, determinare l'albero dei cammini minimi dal nodo 1 a tutti gli altri nodi per la rete in figura:



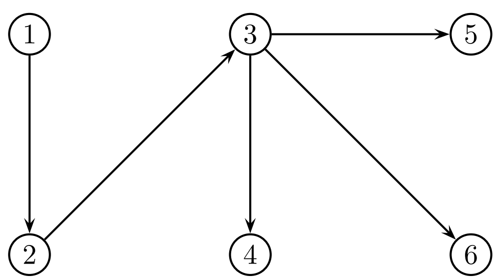
Soluzione:



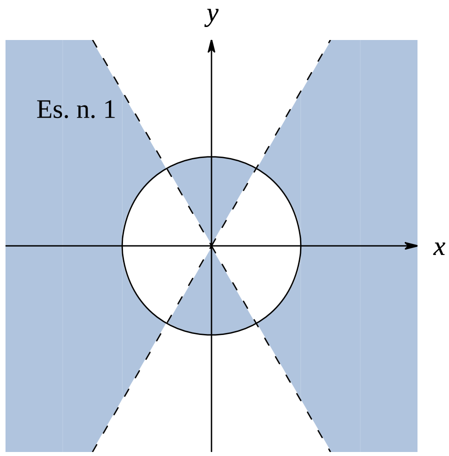
5. Usando l'algoritmo di Dijkstra, disegnare l'albero dei cammini minimi per la rete in figura, supponendo che il nodo 1 sia la sorgente:

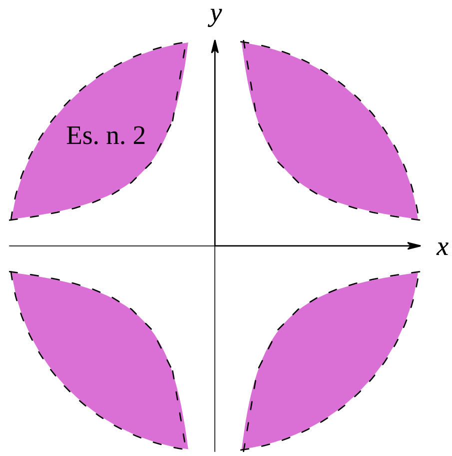


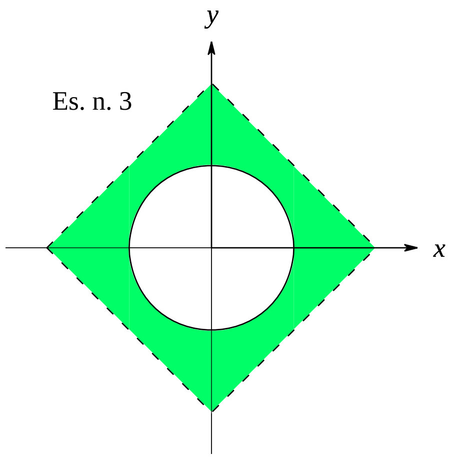
Soluzione:

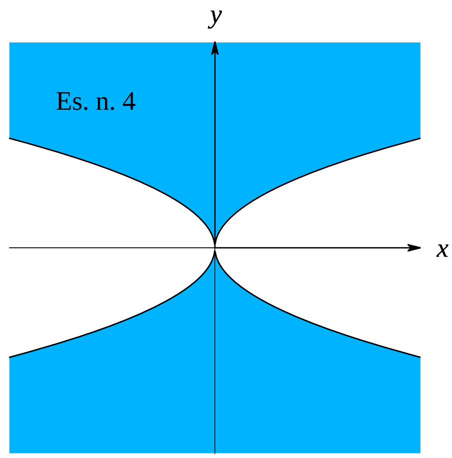


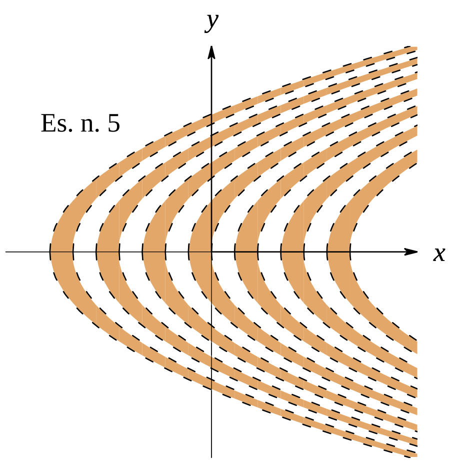
Soluzioni sui domini delle funzioni di due variabili

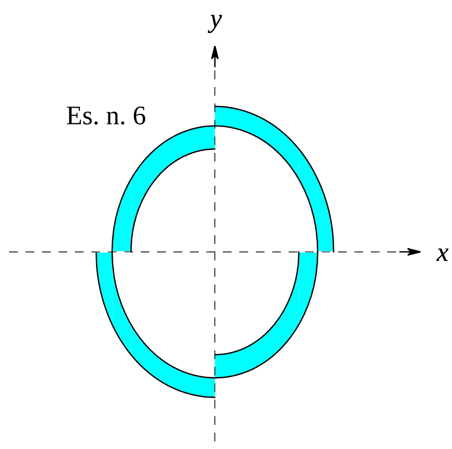


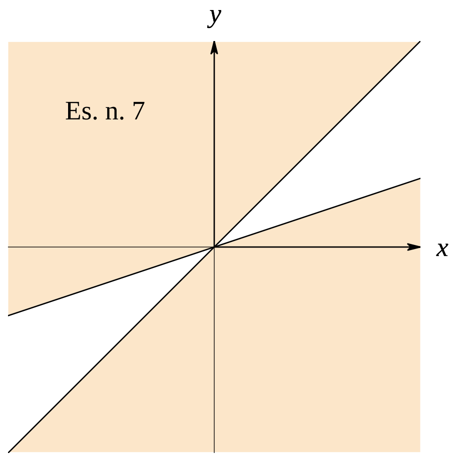




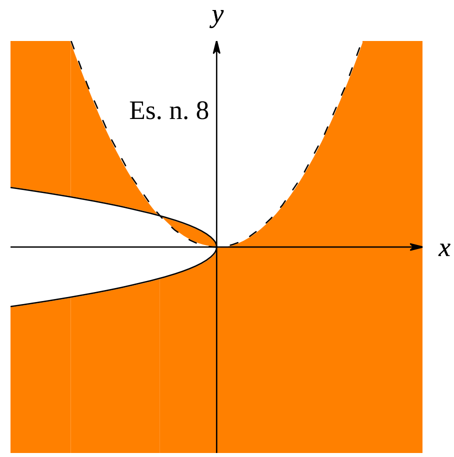








y
x
Es. n. 7



y
x
Es. n. 8