UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SALERNO
C.d.L. in INGEGNERIA GESTIONALE
Esercizi di Ricerca Operativa
Prof. Saverio Salerno
Corso tenuto nell'anno solare 2008

I seguenti esercizi sono da ritenersi di preparazione alla prova d'esame.
Si invitano gli studenti a segnalare eventuali errori riportati nelle soluzioni.

Domini di funzioni di due variabili

Determinare i domini delle seguenti funzioni di due variabili (le soluzioni sono alla fine del fascicolo):

1. $f(x,y) = \sqrt[4]{\frac{x^2+y^2-3}{3x^2-y^2}}$
2. $f(x,y) = \log\left(x^2y^2-4\right) + \log\left(16-x^2-y^2\right)$
3. $f(x,y) = \log(4-|x|-|y|) + \sqrt{x^2+y^2-4}$
4. $f(x,y) = \sqrt{y^4-2x^2}$
5. $f(x,y) = \left[\sin\left(y^2-4x\right)\right]^{|xy+x|}$
6. $f(x,y) = \sqrt{\frac{\arcsin(3x^2+2y^2-3)}{xy}}$
7. $f(x,y) = \sqrt{x^2-4xy+3y^2}$
8. $f(x,y) = \sqrt{\frac{x+3y^2}{2x^2-4y}}$

Soluzione grafica di problemi di PL

1. Risolvere graficamente il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{gathered}\min -x_1 + \frac{5}{2}x_2,\\ 2x_1 - 2x_2 \geq 7,\\ 2x_1 \leq 7,\\ -2x_2 \leq 7.\end{gathered}$$

Soluzione: $x_1 = \frac{7}{2}$; $x_2 = -\frac{7}{2}$.

2. Risolvere graficamente il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{gathered}\min x_2,\\ x_1 + x_2 \geq 0,\\ -8x_1 + 6x_2 \geq 21,\\ 2x_2 \leq 7.\end{gathered}$$

Soluzione: $x_1 = -\frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2}$.

3. Risolvere graficamente il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{gathered}\max 2x_1 + 2x_2,\\ x_1 - 2x_2 \geq 10,\\ 2x_1 + x_2 \leq 22,\\ x_1 + 4x_2 \leq 32,\\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.\end{gathered}$$

Soluzione: $x_1 = \frac{54}{5}$; $x_2 = \frac{2}{5}$.

4. Risolvere graficamente il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{gathered}\min\ 4x_1 - x_2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \geq 3, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.\end{gathered}$$

Soluzione: $x_1 = 6$; $x_2 = 0$.

Vertici dei poliedri

1. Determinare algebricamente tutti i vertici del poliedro:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 3, \\ 3x_1 + x_2 \leq 4, \\ 4x_1 + x_2 \leq 5, \\ 5x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Soluzione: i vertici sono i punti $(0,0)$, $(0,3)$, $\left(\frac{6}{5}, 0\right)$, $(1,1)$.

2. Sia dato il seguente poliedro:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - x_2 \geq 2, \\ x_2 + x_3 = 4, \\ x_2 + x_4 = 11, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

Spiegare perchè le seguenti affermazioni sono errate:

a) il punto $(12, 4, 0, 7)^T$ non è ammissibile;

b) il punto $(12, 4, 0, 7)^T$ è vertice;

c) il punto $(14, 5, -1, 6)^T$ non è ammissibile;

d) il punto $(4, 0, 4, 11)^T$ è vertice.

3. Determinare tutte le basi (ammissibili) e le soluzioni di base ammissibili del seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Soluzione: ci sono 3 basi ammissibili non degeneri e 3 basi ammissibili degeneri.

4. Sia dato il poliedro $P(\tau)$, con $\tau \geq 0$, definito da:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + \tau x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = \tau, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Determinare per quali valori non negativi di τ il poliedro $P(\tau)$ ammette esattamente due soluzioni ammissibili di base (anche degeneri) e chiarire se sia possibile ottenerne tre. Determinare, inoltre, per quali valori non negativi di τ il poliedro $P(\tau)$ ammette $(0,0,1)^T$ come suo vertice.
Soluzione: $1 < \tau \leq 2$. Il poliedro $P(\tau)$ ammette $(0,0,1)^T$ come suo vertice per $\tau = 2$.

5. Si consideri il seguente poliedro:

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 9, \\ x \geq 0. \end{gathered}$$

Giustificare perchè, tra le seguenti affermazioni, risulta corretta solo la terza:

a) la prima e la seconda colonna della matrice dei vincoli formano una base ammissibile;

b) il punto $(1,1,0,0)^T$ è un vertice del poliedro;

c) il punto $(3,0,0,0)^T$ è un vertice del poliedro;

d) il poliedro può avere più di 6 vertici.

Metodo del simplesso

1. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min \ (2,-1,1,0,0)\,x,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$x \in \mathbb{R}^5, \ x \geq 0.$$

Giustificare perchè, tra le seguenti affermazioni, risulta corretta solo la seconda:

a) la base costituita dalla quarta e quinta colonna soddisfa il criterio di ottimalità;

b) la base costituita dalla quarta e quinta colonna soddisfa il criterio di illimitatezza;

c) il vertice associato alla base costituita dalla quarta e quinta colonna è $(0,0,1,0,2)$;

d) la funzione obiettivo è limitata inferiormente nell'insieme ammissibile.

2. In un'iterazione del metodo del simplesso risulta $x_B = (x_1, x_3, x_5)^T$, $x_N = (x_2, x_6, x_7, x_4)^T$,

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Giustificare perchè, tra le seguenti affermazioni, risulta falsa solo la prima:

a) le variabili x_7 e x_4 sono candidate ad entrare in base;

b) non è soddisfatto il criterio di illimitatezza;

c) la soluzione di base corrente non soddisfa il criterio di ottimalità;

d) la prossima soluzione di base ammissibile sarà degenere.

3. Risolvere il seguente problema di PL con il metodo del simplesso:

$$\begin{gathered} \max x_1 + 9x_2 + x_3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15, \\ x \geq 0. \end{gathered}$$

Soluzione: $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = \dfrac{9}{2}$.

4. Risolvere il seguente problema di PL con il metodo del simplesso:

$$\begin{gathered}\min\ 80x_1 + 60x_2,\\ 0.2x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25,\\ x_1 + x_2 = 1,\\ x \geq 0.\end{gathered}$$

Soluzione: l'ottimo della funzione obiettivo vale 71.67.

5. Risolvere il seguente problema di PL con il metodo del simplesso:

$$\begin{gathered}\min\ x_1 + 2x_2,\\ x_1 + 3x_2 \geq 11,\\ 2x_1 + x_2 \geq 9,\\ x \geq 0.\end{gathered}$$

Soluzione: $x_1 = \dfrac{16}{5}$, $x_2 = \dfrac{13}{5}$.

6. In merito al problema di PL che segue, verificare la falsità della seguente affermazione: "In una soluzione ammissibile di base ottima di un problema di PL (di minimo, in forma standard), i coefficienti di costo ridotto devono essere tutti non negativi".

$$\begin{gathered}\min\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3,\\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2,\\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1,\\ x \geq 0.\end{gathered}$$

Soluzione: riflettere sulle soluzioni di base ammissibili $(x_4, x_1, x_6)^T = (2, 1, 0)^T$ e $(x_4, x_1, x_3)^T = (2, 1, 0)^T$.

7. Sia dato il problema di PL:

$$\begin{gathered}\min\ -4x_1 + 9x_3 + 12x_4 - 5x_5 + 7x_6,\\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 3,\\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 = 6,\\ -x_1 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 + x_6 = 5,\\ x \geq 0.\end{gathered}$$

a) Si verifichi che le variabili x_1, x_2 e x_3 individuano una base ottima;

b) si determini l'intervallo di valori entro cui può variare il coefficiente di costo c_2 (relativo alla variabile x_2) affinchè la soluzione determinata al punto precedente rimanga ottima. Se si sceglie c_2 maggiore dell'estremo superiore dell'intervallo sopra determinato, qual è la variabile candidata ad entrare in base?

c) Si determini l'intervallo di valori entro cui può variare il termine noto b_2 del secondo vincolo affinchè la base individuata da x_1, x_2 e x_3 rimanga ottima. Qual è l'espressione che lega il valore ottimo della funzione obiettivo a b_2?

Soluzione: b) $c_2 \in [-1, 2]$; se $2 < c_2 \leq 3$, la variabile candidata ad entrare in base è x_6; se $c_2 > 3$, la variabile con costo ridotto minore è x_6; c) $b_2 \in \left[\frac{21}{4}, 8\right]$; $z = 12 + 2b_2$.

Teoria della dualità

Costruire i duali dei problemi di programmazione relativi alla prima sezione degli esercizi (risoluzione grafica). Confrontare che i valori della funzione obiettivo per il primale e per il duale siano gli stessi. Procedere con la risoluzione grafica dei problemi duali e studiare, inoltre, i duali mediante il metodo del simplesso.

Programmazione lineare intera

1. Determinare la soluzione del seguente problema di programmazione lineare intera con l'algoritmo del branch and bound:
$$\begin{gathered}\min -x_1 + x_2,\\ x_1 + x_2 \geq 0,\\ 2x_2 \leq 3,\\ 2x_1 \leq 5,\\ x_1 \text{ e } x_2 \text{ interi.}\end{gathered}$$
Soluzione: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

2. Determinare la soluzione del seguente problema di programmazione lineare intera con l'algoritmo del branch and bound:
$$\begin{gathered}\max \frac{1}{2}x_1 + 2x_2,\\ -4x_1 + 6x_2 \leq 5,\\ x_1 + x_2 \leq 5,\\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 \text{ e } x_2 \text{ interi.}\end{gathered}$$
Soluzione: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

3. Determinare la soluzione del seguente problema di programmazione lineare intera con l'algoritmo del branch and bound:
$$\begin{gathered}\max -1.7x_1 + 0.6x_2,\\ -5x_1 - 4x_2 \leq 5,\\ -5x_1 + 6x_2 \leq 30,\\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10,\\ x_2 \geq 0,\ x_1 \text{ e } x_2 \text{ interi.}\end{gathered}$$
Soluzione: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

4. Determinare la soluzione del seguente problema di programmazione lineare intera con l'algoritmo del branch and bound:
$$\begin{gathered}\max x_2,\\ -x_1 + 3x_2 \leq 6,\\ 2x_1 + 4x_2 \leq 13,\\ x_1 \leq 2,\\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 \text{ e } x_2 \text{ interi.}\end{gathered}$$
Soluzione: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

5. Determinare la soluzione del seguente problema di programmazione lineare intera con l'algoritmo del branch and bound:
$$\begin{gathered}\max 2x_1 + 2x_2,\\ 2x_2 \leq 5,\\ 5x_1 - x_2 \leq 10,\\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 \text{ e } x_2 \text{ interi.}\end{gathered}$$
Soluzione: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$.

Massimi e minimi vincolati

Determinare e classificare gli eventuali punti di massimo e minimo vincolati assoluti delle seguenti funzioni $f(x, y)$ sotto i vincoli assegnati (per brevità, i punti di minimo e di massimo saranno denotati, rispettivamente, con m e M).

1. $f(x, y) = x^3 + 4xy^2 - 4x, \quad \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$
Soluzione: $m = (1, 0)\,;\ M = (-1, 0)\,.$

2. $f(x,y) = x + y^2, \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2+y^2\right)^2 \le x^2\right\}.$
   Soluzione: $m = (-1,0)\,;\ M = (1,0)\,.$

3. $f(x,y) = \arctan(x+y)\,, \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \le 4\right\}.$
   Soluzione: $m = \left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right);\ M = \left(\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$

4. $f(x,y) = y^2 + xy, \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 4\right\}.$
   Soluzione: $m = (3,-1)\,;\ M_{1,2} = (0,\pm 4)\,.$

5. $f(x,y) = x\log x + y^2 + z\log z, \quad \varphi(x,y,z) = 4x^2 + y^2 - z^2 - 1.$
   Soluzione: $m_{1,2} = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{4}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right);\ M_{1,2} = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{4}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$

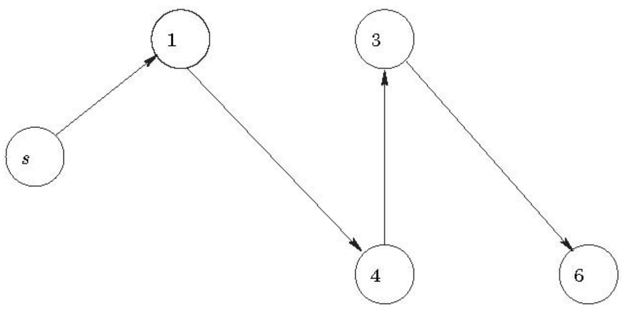
Teoria dei grafi e cammini minimi

1. Sia dato un grafo orientato $G(V,E)$ caratterizzato da 8 nodi ($V = \{s,1,2,3,4,5,6,7\}$) e 13 archi. A ciascun arco è associato un costo secondo le seguenti tabelle:

Arco	$(s,1)$	$(s,2)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,5)$
Costo	1	4	2	4	1	4	6

Arco	$(3,6)$	$(4,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,7)$	$(7,5)$
Costo	1	1	5	9	1	2

Determinare l'albero dei cammini minimi dal nodo s al nodo 6, applicando l'algoritmo di Dijkstra (**suggerimento**: l'algoritmo termina non appena il nodo 6 viene etichettato permanentemente).
Soluzione: il grafico relativo al cammino minimo è quello riportato nella seguente figura. Il costo del cammino complessivo è pari a 6.



2. Sia dato un grafo orientato $G(V,E)$ caratterizzato da 8 nodi ($V = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$) e 14 archi. A ciascun arco è associato un costo secondo le seguenti tabelle:

Arco	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,6)$	$(3,4)$	$(3,5)$
Costo	1	3	1	3	2	1	2

Arco	$(4,6)$	$(4,7)$	$(5,4)$	$(6,7)$	$(6,8)$	$(7,5)$	$(7,8)$
Costo	1	4	3	1	7	6	1

Determinare l'albero dei cammini minimi dal nodo 1 a tutti gli altri nodi.
Soluzione: detto T il cammino, si ha che $T = \{(1,2)\,,\ \ (2,3)\,,\ \ (2,6)\,,\ \ (3,4)\,,\ \ (3,5)\,,\ \ (4,7)\,,\ \ (7,8)\}\,.$

3. Sia $G(V,E)$ un grafo orientato con

$$V = \{1,2,3,4,5,6\}$$

e

$$E = \{(1,3)\,,\ \ (2,1)\,,\ \ (2,3)\,,\ \ (2,4)\,,\ \ (3,4)\,,\ \ (3,5)\,,\ \ (4,5)\,,\ \ (4,6)\,,\ \ (5,6)\}\,.$$

Sia

$$c^T = [c_{13} = 1,\ c_{21} = 1,\ c_{23} = 1,\ c_{24} = 4,\ c_{34} = 1,\ c_{35} = 7,\ c_{45} = 1,\ c_{46} = 6,\ c_{56} = 1]$$

il vettore dei costi. Applicando l'algoritmo di Dijkstra, determinare l'albero dei cammini minimi dal nodo 2 a tutti gli altri nodi.
Soluzione: detto T il cammino, si ha che $T = \{(2,1)\,,\ \ (2,3)\,,\ \ (3,4)\,,\ \ (4,5)\,,\ \ (5,6)\}\,.$

Soluzioni sui domini delle funzioni di due variabili