Esercizio Sia dato un grafo orientato $G(V, E)$ caratterizzato da 8 nodi ($V = \{s, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$) e 13 archi. A ciascun arco è associato un costo secondo le seguenti tabelle:

Arco	(s,1)	(s,2)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,4)	(3,5)
Costo	1	4	2	4	1	4	6

Arco	(3,6)	(4,3)	(6,4)	(6,5)	(6,7)	(7,5)
Costo	1	1	5	9	1	2

1. Determinare l'albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi, applicando l'algoritmo di Dijkstra;

Risoluzione. Il grafo corrispondente al problema da risolvere è descritto in figura 1, in cui a ciascun arco $(i, j) \in E$ è associato il corrispondente costo c_{ij} secondo i valori riportati nelle due tabelle.

Per la risoluzione del problema, applichiamo l'algoritmo di Dijkstra. Indichiamo con W l'insieme dei nodi con etichetta permanente e con $pred$ il vettore di lunghezza pari a $|V|$, avente il seguente significato: $pred(i) = j$ se il nodo j precede i lungo il cammino corrente da s a i. Indichiamo inoltre con $\rho(i)$ il costo del cammino corrente dal nodo s al nodo i.

Al termine dell'algoritmo, per ciascun nodo i, i valori finali $pred(i)$ e $\rho(i)$ indicheranno rispettivamente il nodo che precede i lungo un cammino minimo da s a i e il costo del corrispondente cammino minimo da s a i. All'inizio si ha:

- $W = \emptyset$;
- $\rho(s) = 0$ e $\rho(i) = +\infty$, per ogni $i \neq s$;
- $pred(i) = s$ per ogni i.

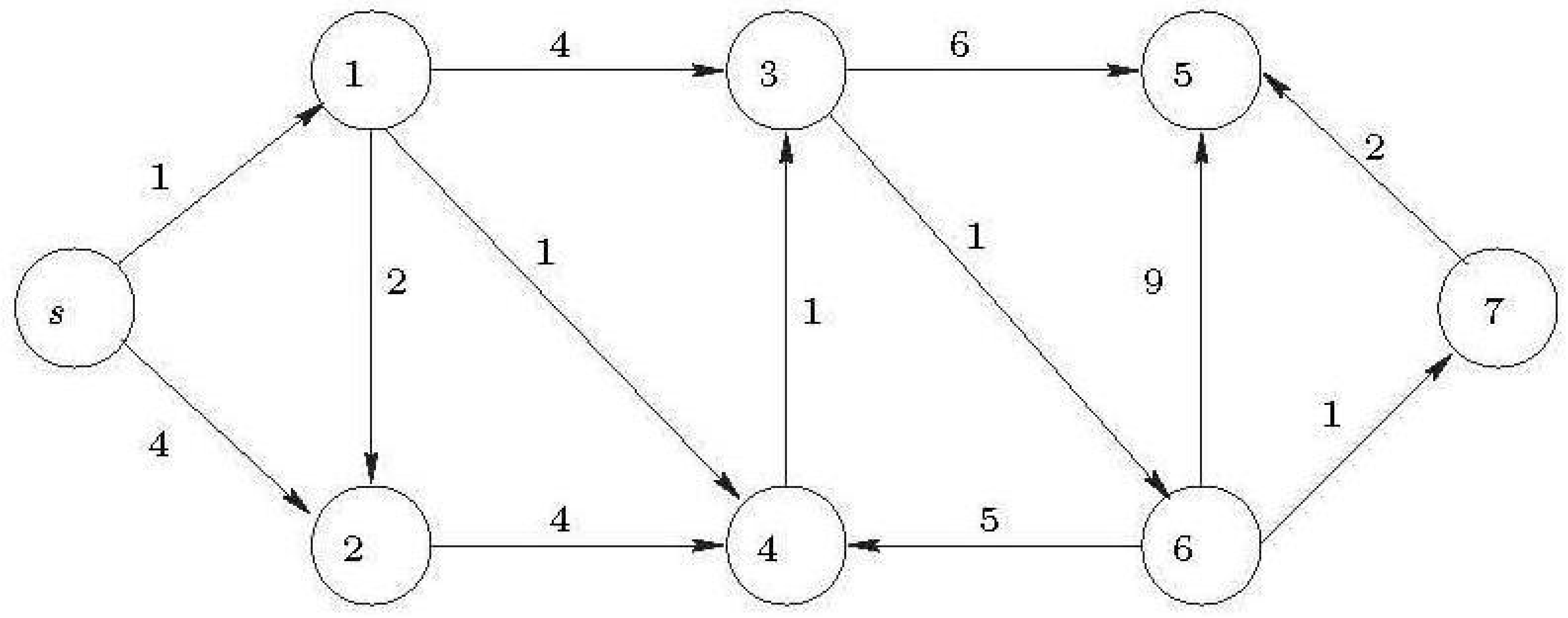

Figura 1: Grafo di partenza

Nell'esecuzione dell'algoritmo, per la descrizione dei valori correnti di W e ρ utilizziamo la seguente tabella, inizializzata nel seguente modo:

W	$\rho(s)$	$\rho(1)$	$\rho(2)$	$\rho(3)$	$\rho(4)$	$\rho(5)$	$\rho(6)$	$\rho(7)$
$\emptyset$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Allo stesso modo, per descrivere i valori correnti del vettore $pred$, utilizziamo la seguente tabella, così inizializzata:

$pred(s)$	$pred(1)$	$pred(2)$	$pred(3)$	$pred(4)$	$pred(5)$	$pred(6)$	$pred(7)$
s	s	s	s	s	s	s	s

L'algoritmo procede nel seguente modo. Fra i nodi non appartenenti a W, si determina quello con valore di etichetta ρ più basso; in altre parole, si calcola il nodo $v \notin W$ tale che

$$\rho(v) = \min_{i \notin W} \rho(i)$$

e lo si inserisce in W (cioè il nodo v assume etichetta permanente). Poi, a partire da v, si aggiornano eventualmente le etichette dei nodi i non appartenenti a W raggiungibili da v, tramite l'arco (v, i). In particolare, per ogni nodo $i \notin W$ tale che $(v, i) \in E$, calcoliamo la quantità $\rho(v) + c_{vi}$. Se

$$\rho(v) + c_{vi} < \rho(i),$$

allora si pone

$$\rho(i) = \rho(v) + c_{vi} \quad \text{e} \quad pred(i) = v.$$

La procedura viene iterata fino a quando tutti i nodi non sono etichettati permanentemente, cioè fino a quando $W = V$.

All'inizio la lista W è vuota e il nodo corrispondente al valore minimo di etichetta ρ è il nodo sorgente s, che entra in W con etichetta permanente $\rho(s) = 0$.

A partire da s sono raggiungibili i nodi 1 e 2. Poichè

$$\rho(s) + c_{s1} = 0 + 1 = 1 < \rho(1) = +\infty \quad \text{e} \quad \rho(s) + c_{s2} = 0 + 4 = 4 < \rho(2) = +\infty,$$

allora si pone

$$\rho(1) = \rho(s) + c_{s1} = 0 + 1 = 1 \quad \text{e} \quad \rho(2) = \rho(s) + c_{s2} = 0 + 4 = 4.$$

Otteniamo quindi

W	$\rho(s)$	$\rho(1)$	$\rho(2)$	$\rho(3)$	$\rho(4)$	$\rho(5)$	$\rho(6)$	$\rho(7)$
$\{s\}$	0	1	4	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

.

Iterando la procedura, poichè

$$\min_{i \notin W} \rho(i) = \min\{\rho(1), \rho(2)\} = \min\{1, 4\} = 1 = \rho(1),$$

il nodo 1 entra in W; dal momento che

$$\rho(1) + c_{12} = 1 + 2 = 3 < \rho(2) = 4, \quad \rho(1) + c_{13} = 1 + 4 = 5 < \rho(3) = +\infty$$

e

$$\rho(1) + c_{14} = 1 + 1 = 2 < \rho(4) = +\infty,$$

allora le etichette dei nodi 2, 3 e 4 cambiano e si pone

$$\rho(2) = \rho(1) + c_{12} = 1 + 2 = 3, \quad \rho(3) = \rho(1) + c_{13} = 1 + 4 = 5,$$

e

$$\rho(4) = \rho(1) + c_{14} = 1 + 1 = 2.$$

Di conseguenza, il nodo predecessore dei nodi 2, 3 e 4 diventa adesso il nodo 1. Otteniamo:

W	$\rho(s)$	$\rho(1)$	$\rho(2)$	$\rho(3)$	$\rho(4)$	$\rho(5)$	$\rho(6)$	$\rho(7)$
$\{s,1\}$	0	1	3	5	2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

e

$pred(s)$	$pred(1)$	$pred(2)$	$pred(3)$	$pred(4)$	$pred(5)$	$pred(6)$	$pred(7)$
s	s	1	1	1	s	s	s

Iterando la procedura otteniamo:

W	$\rho(s)$	$\rho(1)$	$\rho(2)$	$\rho(3)$	$\rho(4)$	$\rho(5)$	$\rho(6)$	$\rho(7)$
$\{s,1,4\}$	0	1	3	3	2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\{s,1,4,2\}$	0	1	3	3	2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\{s,1,4,2,3\}$	0	1	3	3	2	9	4	$+\infty$
$\{s,1,4,2,3,6\}$	0	1	3	3	2	9	4	5
$\{s,1,4,2,3,6,7\}$	0	1	3	3	2	7	4	5
$\{s,1,4,2,3,6,7,5\} = V$	0	1	3	3	2	7	4	5

e

$pred(s)$	$pred(1)$	$pred(2)$	$pred(3)$	$pred(4)$	$pred(5)$	$pred(6)$	$pred(7)$
s	s	1	4	1	s	s	s
s	s	1	4	1	s	s	s
s	s	1	4	1	3	3	s
s	s	1	4	1	3	3	6
s	s	1	4	1	7	3	6
s	s	1	4	1	7	3	6

Dall'ultima riga della precedente tabella è possibile leggere il nodo che precede ciascun nodo lungo il cammino minimo a partire da s. Otteniamo l'albero dei cammini minimi rappresentato in figura 2.

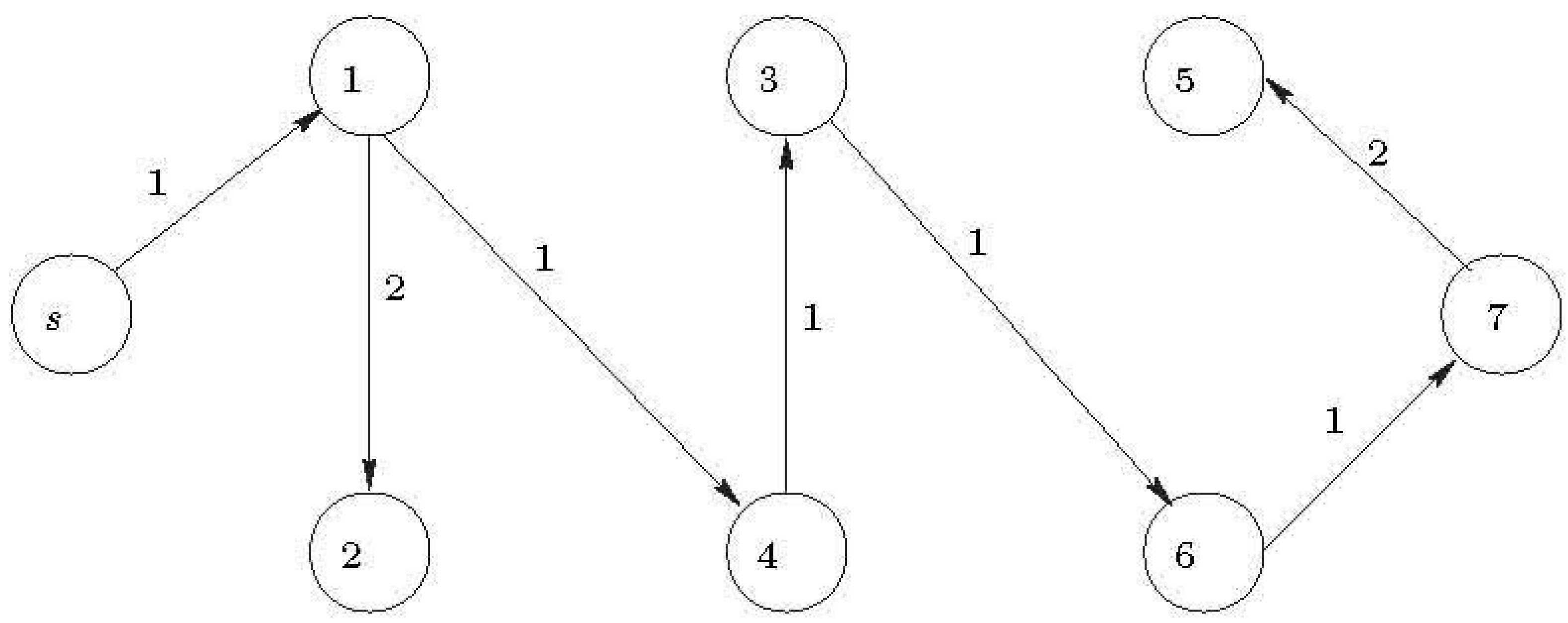

Figura 2: Albero dei cammini minimi