TEORIA DEL METODO DEL SIMPLESSO

(PL - ST) $\min cx$ $\quad c, x \in \mathbb{R}^n$
$Ax = b$ $\quad A(m \times n)$
$x \geq 0$ $\quad b \in \mathbb{R}^m$

se esiste una soluzione ottima, esiste anche su un vertice di P
$P = \{x / Ax = b, x \geq 0\}$

Il numero di vertici di P è finito

se A ha $rk = m$, i vertici coincidono con le sab

Ipotesi di risoluzione

Individuare tutti i possibili vertici del poliedro (che possono essere al max $\binom{n}{m}$) e, se ammissibili, valutare in quel punto la funzione obiettivo.
Il vertice con il minimo valore della f obiettivo sarà soluzione.

→ PROBLEMA: all'aumentare di n, il numero di vertici cresce in maniera esponenziale

Ipotesi alternativa

Individuiamo una sab; di qui, dopo aver identificato le direzioni ammissibili, ci spostiamo lungo una di queste cercando di far diminuire il valore della f obiettivo, fino a trovare un altro vertice, con un valore minore della f obiettivo.
Iterando questo procedimento, arriveremo al vertice con il valore minimo della f obiettivo, cioè la soluzione.

METODO DEL SIMPLESSO — 2 fasi

- fase 1: Individuare una sab da cui partire, oppure stabilire che non esistono sab
- fase 2: Spostarsi da sab a sab x ricercare la soluzione ottima, oppure stabilire che non esiste l'ottimo (PL illimitato inferiormente)

OSSERVAZIONE

Metodo del simplesso si applica a problemi in FS

Indice:

1. Individuiamo direzioni ammissibili e caratterizzazioni
2. Individuiamo PR, coeff. costo ridotto e caratterizzazioni
3. Criterio di ottimalità
4. Criterio di illimitatezza
5. Cambio della sab

In base alla teoria sulle sab, possiamo individuare:

$B = [A_{j1}, A_{j2}, \dots A_{jm}]$ $N = [A_{jm+1}, \dots A_{jn}]$ ← Partizione della matrice dei vincoli A

$\mathcal{B} = [j_1, j_2, j_3 \dots j_m]$ $\mathcal{N} = [j_{m+1}, \dots j_n]$ ← Indici delle variabili in base e fuori base

$A = [B \ N]$ $x = [x_B \ x_N]$ $c = [c_B \ c_N]$

$$\begin{array}{c} \min \ cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \xrightarrow{\text{si può riscrivere}} \begin{array}{c} \min \ c_B x_B + c_N x_N \\ B x_B + N x_N = b \\ x_B, x_N \geq 0 \end{array}$$

Se $\bar{x}$ è sab, allora

$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}$ $\bar{x}_B = B^{-1} b \geq 0$ $\bar{x}_N = 0$

Vincoli attivi in $\bar{x}$

(m) $Ax = b$

$(n-m)$ $e_j x = 0$ $j \in \mathcal{N}$

La matrice dei vincoli attivi può essere scritta:

$$M = \begin{bmatrix} B & N \\ 0 & I \end{bmatrix} \longrightarrow \text{M ha rango pieno e } M^{-1} \text{ è } \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}N \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$I \in (n-m) \times (n-m)$

$\begin{bmatrix} -B^{-1}N \\ I \end{bmatrix}$ ha dimensioni $n \times (n-m)$ e può essere scomposta:

$$\begin{bmatrix} -B^{-1}N \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^{-1}A_{jm+1} & \dots & -B^{-1}A_{jn} \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Indichiamo le colonne con $\eta_j \in \mathbb{R}^n$ $j \in \mathcal{N}$

$$\eta_{jm+k} = \begin{pmatrix} -B^{-1}A_{jm+k} \\ e_k \end{pmatrix}$$

$e_k \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $N e_k = A_{jm+k}$

Questa è la direzione di uno spigolo → $x(\theta) = \bar{x} + \theta \eta_{jm+k}$

SPIGOLO

1) Proposizione Sia $\bar{x}$ sab. Allora si ha: $A\eta_q = 0 \quad e_j \eta_q = \delta_{jq} \quad \forall j \in N$

Dim $A\eta_q = (B \;\; N)\begin{pmatrix} -B^{-1}A_q \\ e_K \end{pmatrix} = -A_q + N e_K = -A_q + A_q = 0$

Inoltre $e_j \eta_q = (\eta_q)_j = (e_K)_j$

se $K = j$ beccheremo proprio l'1

se $K \neq j$ beccheremo uno 0

Moltiplicando un vettore x un versore (che ha tutti 0 tranne 1 nella componente j-esima) rimane solo la componente j-esima

Poiché $j \in [m+1, n]$ x K $j \in N$, sappiamo che in quelle componenti $\eta_q = e_K$

Osservazione

Consideriamo $x(\vartheta) = \bar{x} + \vartheta\eta_q$ → Evidenziamo le variabili in base e fuori base

$$\begin{pmatrix} x_B(\vartheta) \\ x_N(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} + \vartheta \begin{pmatrix} -B^{-1}A_q \\ e_K \end{pmatrix}$$

$\bar{x}_N = 0$

$x_B(\vartheta) = \bar{x}_B - \vartheta B^{-1}A_q$

$x_N(\vartheta) = \vartheta e_K$

Proposizione $\bar{x}$ sab $\eta_j \in \mathbb{R}^n$

a) $x(\vartheta) = \bar{x} + \vartheta\eta_q \quad \vartheta \geq 0$ soddisfa $Ax(\vartheta) = b$

$x_j(\vartheta) = 0 \quad \forall j \in N \quad j \neq q$

$x_q(\vartheta) = \vartheta$

ciò significa che $x(\vartheta)$ rispetta n-1 delle n relazioni che rispettava $\bar{x}$

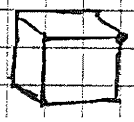
$\bar{x}$ è vertice, $x(\vartheta)$ sarà uno spigolo

$x(\vartheta)$ si trova in n-1 degli n iperpiani in cui si trovava $\bar{x}$

b) Se $\bar{x}$ è sab non degenere ($x_B > 0$), allora $x(\vartheta) = \bar{x} + \vartheta\eta_q$ e η_q è direzione ammissibile in $\bar{x}$

ATTENZIONE ALLE SAB DEGENERI

Es. cubo



Vertice è inters. di 3 iperpiani

Spigolo è inters. di 2 iperpiani

Dim a) • $A\,x(\vartheta) = b \rightarrow A\bar{x} + \vartheta \underbrace{A\eta_q}_{=0} = b \rightarrow A\bar{x} = b$ OK

• Dall'osservazione precedente avremo che $x_N = \vartheta e_K$, cioè

$$\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \cdots \\ x_{m+K} \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_j \\ \cdots \\ \cdots \\ x_q \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vartheta \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow x_j(\vartheta) = 0 \quad j \in N \quad j \neq q$

$\rightarrow x_q(\vartheta) = \vartheta e_K$

b) $x_B = \bar{x}_B - \vartheta B^{-1} A_q > 0$ per valori piccoli di ϑ possiamo continuare ad avere $x_B > 0$

$x_N = \vartheta e_K \geq 0 \quad \forall \vartheta > 0$

$\rightarrow x(\vartheta) \in P \rightarrow \eta_q$ è direzione ammissibile in $\bar{x}$

Proposizione $\bar{x}$ sab. Allora $x = \bar{x} + \sum_{j \in N} x_j \eta_j \quad \forall x \in P$

Dim $x \in P \Rightarrow Ax = b$

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$

x può essere riscritto in funzione di x_B e x_N ; $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -B^{-1}N \\ I \end{pmatrix} x_N}_{\sum_{j \in N} x_j \eta_j}$

Significato geometrico:

$P \subset \bar{x} + \text{Cone}\{\eta_1, \ldots \eta_{n-m}\}$

P è incluso nel cono generato dalle direzioni ammissibili in $\bar{x}$

(2)

(PL-ST) min cx
$Ax=b$
$x \geq 0$

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$

$$cx = c_B x_B + c_N x_N = c_B(B^{-1}b - B^{-1}N x_N) + c_N x_N =$$

$$= \underbrace{c_B B^{-1} b}_{} + (c_N - c_B B^{-1} N) x_N$$

costante: non ha importanza nella determinazione del minimo e può essere trascurata

Poniamo $\bar{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N$ e riscriviamo il (PL-ST)

min $\bar{c}_N x_N$
$Ax=b \rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$ → possiamo eliminarla xk la abbiamo applicata nella determinazione delle altre
$x_B \geq 0$
$x_N \geq 0$

min $\bar{c}_N x_N$
$B^{-1}b - B^{-1}N x_N \geq 0$
$x_N \geq 0$

→

min $\bar{c}_N x_N$
$B^{-1}N x_N \leq B^{-1}b$
$x_N \geq 0$

PROBLEMA RIDOTTO (PR)

xk è stato portato da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^{(n-m)}$

xk abbiamo sfruttato $Ax=b$ (m rel.) e le abbiamo eliminate

Significato del costo ridotto

$\bar{x}$ sab, $q \in N$ _ Allora (i) $\bar{c}_q = c\eta_q = (\nabla f)\eta_q$ $\bar{c}_q$ coincide con la derivata direzionale della f lungo la direzione η_q

(ii) se $\bar{c}_q < 0$ $cx(\vartheta) < c\bar{x}$
Andando lungo la direzione η_q, il valore della f obiettivo decresce

Dim

(i) $c\eta_q = (c_B\ c_N)\begin{pmatrix} -B^{-1}A_q \\ e_K \end{pmatrix} =$

$$= -c_B B^{-1} A_q + c_N e_K = c_q - c_B B^{-1} A_q = \bar{c}_q$$

Stesse considerazioni di $e_j\eta_q$...
Moltiplicando per un versore...

(ii) $c\,x(\vartheta) = c\bar{x} + \vartheta c \eta_q =$
$= c\bar{x} + \vartheta \underbrace{\bar{c}_q}_{<0} < c\bar{x}$

3 CRITERIO DI OTTIMALITÀ

Osservazione: Notiamo che se $\bar{c}_q \geq 0 \ \forall q \in N$, cioè se i coefficienti di costo ridotto sono tutti non negativi, allora la soluzione ottima di PR è $x_N \geq 0$, x.k. con $x_N = 0$ si ottiene il minimo della f obiettivo, cioè 0.

Teorema - Criterio di ottimalità

① $\bar{x}$ sab, $\bar{c}_N \geq 0 \implies \bar{x}_N = 0$ è soluzione ottima di PR
$\Downarrow$
$\bar{x}$ è soluzione ottima di (PL-ST)

② $\bar{c}_N > 0$, $\bar{x}$ sab $\implies$ $\bar{x}$ è soluzione ottima e unica

Possiamo invertire parzialmente la ①, a patto che $\bar{x}$ non sia degenere:

③ $\bar{x}$ sab non degenere, $\bar{x}$ sol. ottima $\rightarrow$ $\bar{c}_N \geq 0$

Dim ① $x \in P$ $\quad x = \bar{x} + \sum_{j \in N} x_j \eta_j$

$$\Downarrow$$

$$cx = c\bar{x} + \sum_{j \in N} x_j (c\eta_j) = c\bar{x} + \sum_{j \in N} x_j \underbrace{\bar{c}_j}_{\geq 0} \geq c\bar{x}$$

Muovendoci lungo una qualunque direzione η_j, la f obiettivo aumenta sempre, quindi il punto $\bar{x}$ sarà minimo

Dualità x ottimalità

$$\min \ c_B x_B + c_N x_N$$
$$B x_B + N x_N = b$$
$$x_B, x_N \geq 0$$

Ricaviamo il duale:

$$\max \ bu$$
$$Bu \leq c_B$$
$$Nu \leq c_N$$

$\bar{x}$ sab ottima $\iff \exists\, u^* \in \mathbb{R}^m \ / \ Nu^* \leq c_N \quad Bu^* \leq c_B$ (ammissibilità)

$x_B(Bu^* - c_B) = 0 \quad x_N(Nu^* - c_N) = 0$ (complementarietà)

Perchè sono necessarie le ultime due condizioni?

Poichè dobbiamo avere m vincoli attivi per u^* ($x K$ $u^* \in \mathbb{R}^m$), allora quando $\bar{x}$ sol ottima, $\bar{x}_B \geq 0$, $\bar{x}_N = 0$

Complementari $x K$

- se $x_B = 0$ allora $B u^* \leq c_B$
- se $x_N = 0$ allora $N u^* \leq c_N$

e viceversa

$B u^* = c_B$ $\quad$ $N u^* \leq c_N$

m vincoli attivi $\rightarrow u^*$ vertice

Da qui:

$u^* = B^{-1} c_B$

Sostituendo in $N u^* \leq c_N$

$N B^{-1} c_B - c_N \leq 0$

$c_N - B^{-1} N c_B \geq 0$ $\rightarrow$ Condizione di ottimalità ritrovata attraverso la teoria della dualità

In generale:

- condizione ottimalità solo SUFFICIENTE x l'ottimo, ma NON NECESSARIA: potrebbe avere una sol ottima x cui $\bar{c}_N$ ha qualche $\bar{c}_q < 0$ (caso degenere)

$\rightarrow$ se $\bar{x}$ sol è non degenere, allora condizione sufficiente e necessaria

TUTTAVIA

x una sol degenere esistono + basi rispetto alle quali rappresentarla, e almeno una di queste porterà a un $\bar{c}_N \geq 0$

Teorema Sia x^* vertice ottimo di (PL-ST)

Allora Esiste una base di x^* tale che i coefficienti di costo ridotto corrispondenti siano tutti non negativi.

(4) CRITERIO DI ILLIMITATEZZA

Thm $\bar{x}$ sab, $\bar{c}_N$ ha alumeno qlk componente negativa $(\exists q \,/\, \bar{c}_q < 0)$

$w_q = B^{-1} A_q \leq 0 \qquad \eta_q = (-w, e_K)$

Allora η_q è una direzione ammissibile del poliedro in $\bar{x}$ e $c\,x(\vartheta) \to -\infty$ → PL illimitato inferiormente

Dim

$x(\vartheta) = \bar{x} + \vartheta \eta_q$

scomponendo nelle variabile in base e non

$x_B(\vartheta) = \bar{x}_B + \vartheta (\eta_q)_B = \underset{\geq 0}{\bar{x}_B} - \vartheta \underset{\geq 0}{w} \geq 0$ OK ammissibile per ogni ϑ

$x_N = \bar{x}_N + \vartheta (\eta_q)_N = 0 + \vartheta \underset{\geq 0}{e_K} \geq 0$ OK ammissibile per ogni ϑ

$\forall \vartheta \geq 0$ $x(\vartheta)$ appartiene al poliedro

Inoltre:

$c\,x(\vartheta) = c(\bar{x} + \vartheta \eta_q) = c\bar{x} + \vartheta (c\eta_q) = c\bar{x} + \vartheta \underset{<0}{\bar{c}_q} < c\bar{x} \quad \forall \vartheta > 0$

→ la funzione obiettivo è illimitata inferiormente

(5) CAMBIO BASE

$\bar{x}$ sab, $\bar{c}_N \leq 0$ per qualche componente q.

In corrispondenza di q, sia $w_q = B^{-1} A_q$ con alumeno qualche componente positiva

Sia $\vartheta = \min \left\{ \dfrac{\bar{x}_{ji}}{w_i} \,/\, w_i > 0 \right\} \qquad p \in B \,/\, \vartheta = \dfrac{\bar{x}_{jp}}{w_p}$

POSSIAMO scegliere una soluzione $\tilde{x}$, definita così: $\tilde{x} = \bar{x} + \vartheta \eta_q$ con $\tilde{x}_q = \vartheta$, $\tilde{x}_p = 0$

in modo tale da diminuire la funzione obiettivo

$c\tilde{x} = c\bar{x} + \vartheta(c\eta_q) = c\bar{x} + \vartheta \underset{<0}{\bar{c}_q} < c\bar{x}.$

Facciamo diventare:
- q componente di base
- p componente fuori base
(le scambiamo di ruolo)

COSA ABBIAMO FATTO?

Se il criterio di illimitatezza fallisce, attraverso il criterio dei rapporti minimi $(\min\{\ldots\})$, possiamo scegliere una nuova soluzione di base ottenuta scambiando una componente di base e una non di base, in modo che diminuisca il valore della f obiettivo