Lemma di Farkas x KKT

Lemma $\nexists\, d \in \mathbb{R}^n \;/\; Bd \geq 0 \quad c^T d < 0 \iff \exists\, v \in \mathbb{R}^p \;/\; Bv = c \quad v \geq 0$

(1) (2) $[c \in \mathbb{R}^n,\ B \in \mathbb{R}^{p \times n}]$

Dim

Ⓐ Dimostriamo la condizione sufficiente. $(\Leftarrow)$

Hp $\exists\, v \in \mathbb{R}^p \;/\; \begin{cases} Bv = c \\ v \geq 0 \end{cases}$

Valutiamo la quantità $c^T d = (Bv)^T d = v^T (Bd)$ ≥ 0 ?

→ se $Bd \geq 0$ allora $c^T d \geq 0$ sistema (1) non ha soluzioni

→ se $Bd < 0$ allora $c^T d < 0$ sistema (1) non ha soluzioni

Il sistema (1) date le ipotesi, non può avere soluzioni.

Ⓑ Dimostriamo la condizione necessaria. $(\Rightarrow)$

Hp $\nexists\, d \in \mathbb{R}^n \;/\; \begin{cases} Bd \geq 0 \\ c^T d < 0 \end{cases}$ → prendiamo un caso particolare: $Bd = 0 \quad c^T d = -1$ Questi valori non verificano il sistema (proprio come vogliamo)

$\begin{pmatrix} B \\ c^T \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ non ha soluzione

Se non verificano il sistema, allora, per il thm di Rouché - Capelli, il rango della matrice incompleta deve essere diverso da quello della matrice completa

$$rk \begin{pmatrix} B & 0 \\ c^T & -1 \end{pmatrix} \neq rk \begin{pmatrix} B \\ c^T \end{pmatrix}$$

Poiché $(c^T \ -1)$ è una sola riga, sappiamo che

$$rk \begin{pmatrix} B & 0 \\ c^T & -1 \end{pmatrix} = rk\,(B \ 0) + 1 = rk(B) + 1$$

poiché $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ è una sola colonna, sappiamo proprio che: $rk \begin{pmatrix} B & 0 \\ c^T & -1 \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} B \\ c^T \end{pmatrix} +$

Uniamo i due risultati trovati:

$$rk\begin{pmatrix}B\\c^T\end{pmatrix}+1 = rk\,B+1 \longrightarrow rk\begin{pmatrix}B\\c^T\end{pmatrix} = rk\,B$$

se ciò è vero, allora vuol dire che c è linearmente dipendente da B

$$\Downarrow$$

$$\exists\, u_1, \dots u_p \in \mathbb{R} \,/\, u_1 b_1 + \dots u_p b_p = c$$

$$\Downarrow$$

$$Bu = c \qquad u \in \mathbb{R}^p$$

Verificata la prima uguaglianza

Per dimostrare che $u \geq 0$, utilizziamo il metodo per induzione.

- Verifichiamo che $u \geq 0$ per $p=1$ ①
- Supponiamo vero per $p-1$ ②
- Dimostriamo che è vero per p ③

① Dimostriamolo.

$$p=1 \qquad \nexists\, d \in \mathbb{R}^n \,/\, b_1 d \geq 0 \quad c^T d < 0$$

(B è una sola riga, b_1)

$$\Downarrow$$

$$\exists\, u \in \mathbb{R} \,/\, b_1 u = c$$

Se consideriamo $d = b_1$, allora:

- $b_1 d = b_1 \cdot b_1 = \|b_1\|^2 > 0$ sempre
- Poichè la prima riga è vera, dobbiamo avere la seconda falsa (il sistema non deve essere verificato):

$$c^T d = c^T b_1 = (b_1 u)^T b_1 = u \|b_1\|^2 \geq 0$$

$$\downarrow \; \geq 0$$

u deve essere per forza ≥ 0

OK verificata per $p=1$

② Supponiamo vera per $p-1$.

③ Dimostriamo che è vero per p.

$\nexists d \in \mathbb{R}^n \,/\, \begin{cases} Bd \geq 0 \\ c^T d < 0 \end{cases}$ $\quad \exists \bar{u} \in \mathbb{R}^p \,/\, B\bar{u} = c$

Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che u non sia tutto positivo, ma abbia alcune componenti non negative, altre negative.

$\bar{u} = (\underbrace{\bar{u}_1, \dots \bar{u}_s}_{\geq 0}, \underbrace{\bar{u}_{s+1}, \dots \bar{u}_p}_{<0})$ $\quad s < p$ → Dobbiamo dimostrare questo assurdo

Se non fossero ordinate, basta riordinare le variabili

- Valutiamo $c = Bu = \sum_{i=1}^{p} \bar{u}_i b_i = \sum_{i=1}^{s} \bar{u}_i b_i + \sum_{i=s+1}^{p-1} \bar{u}_i b_i + \bar{u}_p b_p$.

- Definiamo $\hat{c} = \sum_{i=1}^{s} \bar{u}_i b_i + \bar{u}_p b_p$. Quindi $c = \hat{c} + \sum_{i=s+1}^{p-1} \bar{u}_i b_i$

- Dimostriamo queste due affermazioni:

(A1) $\nexists d \in \mathbb{R}^n \,/\, \begin{cases} Bd \geq 0 \\ c^T d < 0 \end{cases} \implies \nexists d \in \mathbb{R}^n \,/\, \begin{cases} Bd \geq 0 \\ \hat{c}^T d < 0 \end{cases}$

(A2) $\nexists d \in \mathbb{R}^n \,/\, \begin{cases} Bd \geq 0 \\ \hat{c}^T d < 0 \end{cases} \implies \nexists d \in \mathbb{R}^n \,/\, \begin{cases} b_i d \geq 0 & \forall i = 1, \dots p-1 \\ \hat{c}^T d < 0 \end{cases}$

(A1) $c^T d = \hat{c}^T d + \sum_{i=s+1}^{p-1} \underbrace{\bar{u}_i}_{<0} \underbrace{b_i^T d}_{\text{supponiamo } b_i^T d \geq 0} \geq 0$

$\hat{c}^T d$: poiché l'altra quantità è negativa, per rendere tutto positivo, dobbiamo avere $\hat{c}^T d \geq 0$

supponiamo $b_i^T d \geq 0$, quindi x rendere falso il sistema dobbiamo avere $c^T d \geq 0$

$\sum$: < 0

→ abbiamo verificato la non esistenza di soluzioni del secondo sistema $\begin{cases} Bd \geq 0 \\ \hat{c}^T d < 0 \end{cases}$

non ha soluzioni xk $\hat{c}^T d \geq 0$

(A2) Ragioniamo p.a. P.a. $\exists\, d \in \mathbb{R}^n \;/\; \begin{cases} b_i d \geq 0 & \forall i = 1, \dots p-1 \\ \hat{c}^T d < 0 \end{cases}$

Valutiamo $\hat{c}^T d = \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\bar{v}_i}_{\geq 0} \underbrace{b_i^T d}_{\geq 0} + \underbrace{\bar{v}_p}_{< 0} b_p^T d < 0$

affinché $\hat{c}^T d$ sia < 0, x verificare, nell'assurdo il sistema dobbiamo avere $b_p^T d \geq 0$

MA così facendo abbiamo ottenuto:

$$\begin{cases} b_i d \geq 0 & \forall i = 1, \dots p-1 \\ b_p d \geq 0 \\ \hat{c}^T d < 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} Bd \geq 0 \\ \hat{c}^T d < 0 \end{matrix} \longrightarrow$$

Entrambe verificate: ASSURDO (va contro le ipotesi)

c.v.d.

Siamo dunque giunti alla conclusione:

$$\nexists\, d \in \mathbb{R}^n \;/\; \begin{cases} b_i d \geq 0 & \forall i = 1, \dots p-1 \\ \hat{c}^T d < 0 \end{cases}$$

→ Poiché il sistema ha dimensioni $p-1$, verifica l'ipotesi induttiva:

$$\exists\, \hat{v} \in \mathbb{R}^{p-1} \;/\; B\hat{v} = \hat{c} \quad \hat{v} \geq 0$$

Scriviamo $\hat{c}$ in funzione di $\hat{v}$:

$$\hat{c} = B\hat{v} = \sum_{i=1}^{p-1} \hat{v}_i b_i$$

MA vale anche la precedente definizione:

$$c = \hat{c} + \sum_{i=s+1}^{p-1} \bar{v}_i b_i = \sum_{i=1}^{p-1} \hat{v}_i b_i + \sum_{i=s+1}^{p-1} \bar{v}_i b_i = \sum_{i=1}^{s} \hat{v}_i b_i + \sum_{i=s+1}^{p-1} (\hat{v}_i + \bar{v}_i) b_i + 0 \cdot b_p =$$

Poiché b_p non c'è, allora è moltiplicato per 0

$$= B \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \hat{v}_i \\ \hat{v}_i + \bar{v}_i \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{ll} \}\, 1 \dots s & \geq 0 \\ \}\, s+1 \dots p-1 & \text{incerti} \\ \to p & \geq 0 \end{array}$$

Abbiamo $s+1$ coefficienti non negativi per v. ASSURDO xk erano s $\Rightarrow$ Assurdo derivato da $s < p \Rightarrow s = p \Rightarrow v \geq 0 \;\forall$ ...