FUNZIONI E FORME QUADRATICHE

- Funzione quadratica: $q(x) = \frac{1}{2}x^T A x + c^T x$

- Forma quadratica associata ad $A \in n \times n$ simmetrica: $x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = f(x)$

Proprietà: $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} (\lambda x_i)(\lambda x_j) = \lambda^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

- $q(x)$ è convessa su $\mathbb{R}^n$ $\iff \frac{1}{2} y^T A y \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$ (IDEM x convessità stretta)

- La forma quadratica $f(x)$ si dice:
  - definita positiva se $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$
  - semidefinita positiva se $x^T A x \geq 0 \quad \forall x$
  - indefinita se $\exists\, y \,/\, y^T A y > 0$, $\exists\, z \,/\, z^T A z < 0$

  Lo stesso vale anche per A

- TEST x positività di A:

  A_K $K = 1, \dots n$ minori principali di A (sottomatrici di nord-ovest) : A è definita positiva $\iff \det A_K > 0 \quad \forall K$

- TEST x semipositività di A:

  $D_{i_K j_K}$ sottomatrici quadrate eliminando $n-K$ righe e colonne in tutti i modi possibili $1 \leq K \leq n$: A è semidefinita positiva $\iff \det D_{i_K j_K} \geq 0 \quad \forall K$

- Definizione di $F(x) = \dfrac{f(x)}{\|x\|^2}$ con $\|x\| = 1$

$F(x)$ è proprio la forma quadratica, perché, poiché $\|x\| = 1$, $\|x\|$ non influenza i valori della forma, ma non vale la proprietà $F(\lambda x) = \lambda^2 F(x)$ - Infatti:

$$F(\lambda x) = \frac{f(\lambda x)}{\|\lambda x\|^2} = \frac{\cancel{\lambda^2} f(x)}{\cancel{\lambda^2} \|x\|^2} = F(x)$$

Caratterizzazione max e min di $F(x)$:

$$D_K F(x) = 0 \longrightarrow D_K \frac{f(x)}{\|x\|^2} = \frac{D_K(f(x))\|x\|^2 - f(x)\, D_K(\|x\|^2)}{\|x\|^4} = 0$$

$$D_K f(x) = D_K \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = D_K \left\{ a_{KK} x_K^2 + 2\sum_{i \neq K} a_{Ki} x_i x_K + \sum_{i,j \neq K} a_{ij} x_i x_j \right\} =$$

$$= 2 a_{KK} x_K + 2 \sum_{i \neq K} a_{Ki} x_i = 2 \sum_i a_{Ki} x_i$$

$$2 \sum_i a_{Ki} x_i \,\|x\|^2 - f(x) \cdot 2 x_K = 0$$

$$\sum_i a_{Ki} x_i \,\cancel{\|x\|^2} - F(x)\, \cancel{\|x\|^2} \cdot x_K = 0$$

$$(Ax)_K = F(x)\, x_K$$

x è un autovettore di A con autovalore $F(x)$

$\downarrow$

I punti critici sono gli autovettori della matrice A