Indice

10

Metodo del simplesso: motivazioni e fondamenti teorici

10.1 Generalità

Nel seguito illustriamo le motivazioni geometriche e i concetti essenziali alla base del cosiddetto *metodo del simplesso* per la soluzione dei problemi di PL.
Ci riferiamo, in particolare, a un problema di PL posto in forma standard:

$$\begin{aligned} min \quad & c'x \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

in cui $x, c \in R^n$, $A(m \times n)$ e $b \in R^m$.
In base ai risultati stabiliti in precedenza è noto che:

(i) se esiste una soluzione ottima esiste anche una soluzione ottima in un vertice del poliedro $P = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\}$ che definisce l'insieme ammissibile;

(ii) il numero di vertici di P è finito;

(iii) se A ha rango m, i vertici di P coincidono con le soluzioni ammissibili di base.

Nell'ipotesi che A abbia rango m la ricerca di una soluzione ottima può allora essere effettuata, in linea di principio, esaminando tutte le soluzioni ammissibili di base e scegliendo quella a cui corrisponde il valore minimo della funzione obiettivo.

Tuttavia, il numero di tali soluzioni può essere eccessivamente elevato per valori elevati di n e m. È noto, infatti, che il numero di soluzioni ammissibili di base può arrivare, nel caso peggiore, fino al valore:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Un metodo sistematico per effettuare la ricerca della soluzione ottima, senza dover enumerare necessariamente tutte le soluzioni ammissibili di base, è il *metodo del simplesso*, dovuto a G. B. Dantzig (1947).
L'idea alla base del metodo del simplesso è quella di spostarsi da un vertice di P a un vertice adiacente facendo diminuire (ove possibile) a ogni passo la funzione obiettivo, e comunque assicurando che non si riottengano ciclicamente le stesse basi.
Il metodo del simplesso può essere descritto distinguendo due fasi (che tuttavia, come verrà mostrato in seguito, possono essere anche combinate in una singola fase):

- una prima fase (fase I) in cui si determina una soluzione ammissibile di base, ovvero si riesce a stabilire che non esistono soluzioni ammissibili;
- una seconda fase (fase II) in cui, a partire da una soluzione ammissibile di base si determina la soluzione ottima, ovvero si riesce a stabilire che la funzione obiettivo è illimitata inferiormente.

Poichè l'algoritmo utilizzato nella fase II può essere anche impiegato, attraverso un'opportuna trasformazione, per risolvere il problema della fase I, conviene dapprima analizzare la fase II.
In questo capitolo, dopo brevi richiami sulla rappresentazione dell'insieme ammissibile, ci limitiamo a considerare:

- la definizione algebrica degli spostamenti lungo gli spigoli del poliedro,
- le condizioni sufficienti ad assicurare che una soluzione ammissibile di base assegnata sia ottima,
- le condizioni sufficienti a riconoscere il caso in cui la funzione obiettivo è illimitata inferiormente lungo lo spigolo considerato,
- le condizioni sotto cui è possibile passare da un vertice a un vertice adiacente riducendo la funzione obiettivo.

In base a tali risultati definiamo uno schema concettuale di algoritmo, rinviando a un successivo approfondimento l'analisi di alcune realizzazioni algoritmiche e lo studio della fase I.

10.2 Spigoli in un vertice del poliedro

Ci riferiamo a un problema di PL in forma standard, facendo l'ipotesi che la matrice A abbia rango m, che sia nota una base B di A e che $\bar{x}$ sia una soluzione ammissibile di base relativa alla base considerata.
In questo paragrafo ci proponiamo di caratterizzare dal punto di vista algebrico gli spostamenti dal vertice $\bar{x}$ lungo gli spigoli del poliedro che hanno origine in $\bar{x}$.
Indichiamo con

$$\mathcal{B} = \{j_1, \ldots, j_m\}$$

l'insieme degli indici delle colonne A_j di A che costituiscono la base e con

$$\mathcal{N} = \{j_{m+1}, \ldots, j_n\}$$

l'insieme degli indici delle colonne non di base di A.

Partizioniamo A, x e c nella forma:

$$A = [B \quad N], \qquad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix},$$

in cui x_B, $c_B \in R^m$, x_N, $c_N \in R^{n-m}$ e si è posto

$$\begin{aligned} B &= [A_{j_1}, \ldots, A_{j_m}], \\ N &= [A_{j_{m+1}}, \ldots, A_{j_n}]. \end{aligned}$$

Il problema di PL si può quindi riscrivere, distinguendo le variabili di base (x_B) e quelle non di base (x_N), nella forma:

$$\begin{aligned} min \quad & c_B{}'x_B + c_N{}'x_N \\ & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B \geq 0, x_N \geq 0. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Se $\bar{x} \in R^n$ è la soluzione ammissibile di base assegnata si ha allora:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}$$

con

$$\bar{x}_B = B^{-1}b \geq 0, \qquad \bar{x}_N = 0. \tag{10.2}$$

Nel punto $\bar{x}$ sono attivi (almeno) gli n vincoli:

$$\begin{aligned} &Ax = b \\ &e_j'x = 0, \quad j \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

dove $e_j \in R^n$ sono le colonne della matrice identità $n \times n$.

Il punto $\bar{x}$ è quindi un vertice di P appartenente all'intersezione degli n iperpiani individuati dal sistema precedente.

Gli spigoli che hanno origine in $\bar{x}$ sono facce 1-dimensionali passanti per $\bar{x}$ e quindi hanno direzioni parallele a $n-1$ degli iperpiani che definiscono $\bar{x}$, o equivalentemente, perpendicolari alle normali di tali iperpiani.

Osserviamo anche che gli spigoli, dovendo appartenere a P, devono soddisfare i vincoli $Ax = b$ e quindi, per generare uno spigolo del poliedro si può solo far variare una variabile non di base (infatti, fissate le variabili non di base, risultano univocamente individuate anche le variabili di base).

Le normali agli n iperpiani considerati si possono rappresentare come righe della matrice

$$M = \begin{bmatrix} B & N \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

dove I è la matrice identità $(n-m) \times (n-m)$. Si verifica facilmente che M è non singolare (se B ha rango m, come si è supposto) ed esiste quindi un'inversa M^{-1} data da:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}N \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

La matrice

$$\begin{bmatrix} -B^{-1}N \\ I \end{bmatrix}$$

di dimensioni $n \times (n-m)$ (che coincide con la sottomatrice di M^{-1} associata alle componenti non di base) si può porre nella forma:

$$\begin{bmatrix} -B^{-1}N \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^{-1}A_{j_{m+1}} & \dots & -B^{-1}A_{j_n} \\ 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Se indichiamo con $\eta_j \in R^n$, per $j \in \mathcal{N}$, le $n-m$ colonne di tale matrice, si può scrivere:

$$\eta_{j_{m+k}} = \begin{pmatrix} -B^{-1}A_{j_{m+k}} \\ e_k \end{pmatrix}, \tag{10.3}$$

dove $e_k \in R^{(n-m)}$ è la k–ma colonna (nell'ordinamento prescelto per le variabili non di base) della matrice identità $(n-m) \times (n-m)$ e quindi soddisfa:

$$Ne_k = A_{j_{m+k}}. \tag{10.4}$$

Esempio 1

Consideriamo il poliedro convesso in forma standard definito da:

$$\begin{aligned}&2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4\\&x_1 + 1/2x_2 + x_3 - x_4 = 1\\&x \geq 0.\end{aligned}$$

La matrice dei coefficienti dei vincoli di eguaglianza è data da:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definiamo una base scegliendo $\mathcal{B} = \{1, 4\}$, $\mathcal{N} = \{2, 3\}$ e ponendo

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con le notazioni introdotte in precedenza si ha ovviamente:

$$j_1 = 1, \quad j_2 = 4, \quad j_3 = 2, \quad j_4 = 3.$$

In corrispondenza alla base fissata si ha la soluzione ammissibile di base (riordinata in componenti di base e non di base):

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_4 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nel punto $\bar{x}$ i vincoli attivi definiscono il sistema:

$$\begin{aligned}&2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4\\&x_1 + 1/2x_2 + x_3 - x_4 = 1\\&x_2 = 0\\&x_3 = 0\end{aligned}$$

e quindi (riordinando le colonne) la matrice dei coefficienti dei vincoli attivi si può scrivere nella forma:

$$M = \begin{bmatrix} B & N \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la cui inversa è data da:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}N \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le colonne di M^{-1} associate agli indici non di base sono allora:

$$\eta_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Ai fini dei successivi sviluppi è importante comprendere bene il significato algebrico e geometrico dei vettori η_j. A tale scopo, dimostriamo innanzitutto la proposizione seguente, che è una conseguenza immediata della (10.3).

Proposizione 10.1 *Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile di base e siano η_j, con $j \in \mathcal{N}$, i vettori definiti nella (10.3). Allora, per ogni fissato $q \in \mathcal{N}$ si ha:*

$$\begin{aligned} &A\eta_q = 0 \\ &e_j'\eta_q = 0, \quad \text{per ogni} \quad j \in \mathcal{N}, \quad j \neq q, \\ &e_q'\eta_q = 1 \end{aligned}$$

dove A si suppone ordinata nella forma:

$$A = [A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n]$$

e $e_j \in R^n$, con $j \in \mathcal{N}$ sono le colonne dell'identità $n \times n$.

Dim. Si assuma $q = j_{m+k}$, ossia si supponga che q sia il $k-$mo indice non di base. Ricordando le (10.3) (10.4), si può allora scrivere (riordinando A e $\eta_{j_{m+k}}$ in modo consistente):

$$\begin{aligned} A\eta_{j_{m+k}} &= [B \quad N] \begin{pmatrix} -B^{-1}A_{j_{m+k}} \\ e_k \end{pmatrix} \\ &= -A_{j_{m+k}} + Ne_k \\ &= -A_{j_{m+k}} + A_{j_{m+k}} = 0; \end{aligned}$$

inoltre, tutte le componenti non di base di $\eta_{j_{m+k}}$ sono nulle, tranne quella di indice j_{m+k}, che è eguale a 1, e quindi vale l'enunciato. □

La proposizione precedente mostra che, per ogni fissato $q \in \mathcal{N}$, la direzione η_q è ortogonale alle normali di $n-1$ degli iperpiani cui appartiene $\bar{x}$ e quindi individua una direzione *parallela* a tali $n-1$ iperpiani.

Se definiamo una semiretta con origine in $\bar{x}$ e direzione η_q si ottengono i punti

$$x(\theta) = \bar{x} + \theta\eta_q, \quad \theta \geq 0$$

le cui componenti di base e non di base sono date, rispettivamente, da

$$x_B(\theta) = \bar{x}_B - \theta B^{-1}A_q, \qquad e \quad x_N(\theta) = \theta e_k, \tag{10.5}$$

dove si è assunto

$$q = j_{m+k}, \quad e_k \in R^{(n-m)}.$$

Dalla Proposizione 10.1 si ottiene il risultato seguente.

Proposizione 10.2 *Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile di base e siano η_j, con $j \in \mathcal{N}$, i vettori definiti nella* (10.3).

Allora, per ogni fissato $q \in \mathcal{N}$ si ha che ogni punto della semiretta

$$x(\theta) = \bar{x} + \theta\eta_q, \quad \theta \geq 0$$

soddisfa:

$$\begin{array}{l} Ax(\theta) = b, \\ x_j(\theta) = 0, \quad \text{per ogni} \quad j \in \mathcal{N}, \quad j \neq q, \\ x_q(\theta) = \theta. \end{array} \tag{10.6}$$

Inoltre, se $\bar{x}$ è non degenere la direzione η_q è una direzione ammissibile in $\bar{x}$ per P, ossia esiste $\bar{\theta} > 0$ tale che

$$x(\theta) = \bar{x} + \theta\eta_q \in P \quad \textit{per ogni} \quad \theta \in [0, \bar{\theta}].$$

Dim. Ricordando la (10.2), dalla Proposizione 10.1 segue ovviamente:

$$Ax(\theta) = A\bar{x} + \theta A\eta_q = A\bar{x} = b.$$

Inoltre, posto $q = j_{m+k}$, dalla (10.5) segue:

$$x_j(\theta) = 0, \quad j \in \mathcal{N}, \quad j \neq q, \quad x_q(\theta) = \theta,$$

e quindi vale la (10.6).
Infine, essendo

$$x_B(\theta) = \bar{x}_B - \theta B^{-1} A_q,$$

con $\bar{x}_B > 0$ (in quanto $\bar{x}$ è non degenere), si ha che per valori positivi sufficientemente piccoli di θ, risulta anche $x_B(\theta) \geq 0$ e quindi, tenendo conto delle (10.6), si ha $x(\theta) \in P$. □

Osserviamo che, nel caso generale, quando $\bar{x}$ è degenere, la direzione η_q potrebbe non essere ammissibile, ossia per valori arbitrariamente piccoli di $\theta > 0$ si potrebbe avere avere $x(\theta) \notin P$.

Esempio 2

Consideriamo nuovamente il poliedro convesso dell' Esempio 1, dove $B = \{1, 4\}$, $\mathcal{N} = \{2, 3\}$ ed è nota la soluzione ammissibile di base:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_4 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo, ad esempio, la direzione η_3 definita da:

$$\eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ossia supponiamo di fissare $q = 3$. Si avrà allora:

$$x_B(\theta) = \begin{pmatrix} x_1(\theta) \\ x_4(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x_N(\theta) = \begin{pmatrix} x_2(\theta) \\ x_3(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che il punto così ottenuto è ammissibile per $\theta \geq 0$. Nel caso particolare considerato ciò sta a indicare che η_3 non solo è una direzione ammissibile ma è anche una direzione tutta contenuta nel poliedro.
Se assumiamo $q = 2$ si ha:

$$\eta_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e si può scrivere:

$$x_B(\theta) = \begin{pmatrix} x_1(\theta) \\ x_4(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_N(\theta) = \begin{pmatrix} x_2(\theta) \\ x_3(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso si otterranno punti ammissibili purché sia:

$$5/3 - \theta\frac{1}{2} \geq 0.$$

Notiamo che uno spostamento lungo η_3 per valori di $\theta > 0$ implica

$$x_2(\theta) = 0, \quad x_3(\theta) > 0,$$

mentre uno spostamento lungo η_2, con $10/3 > \theta > 0$ implica

$$x_2(\theta) > 0, \quad x_3(\theta) = 0. \quad \square$$

Utilizzando le notazioni introdotte, enunciamo ora il risultato seguente.

Proposizione 10.3 *Se $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile di base corrispondente alla base B, allora ogni $x \in P$ si può esprimere nella forma:*

$$x = \bar{x} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \eta_j x_j \tag{10.7}$$

essendo η_j, con $j \in \mathcal{N}$, i vettori definiti nella (10.3).

Dim. Basta osservare che se x è un punto ammissibile devono essere soddisfatti i vincoli di eguaglianza $Ax = b$ e di conseguenza, premoltiplicando il vincolo di eguaglianza nella (10.1) per B^{-1} e risolvendo rispetto ad x_B, si ha:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \tag{10.8}$$

e quindi se x è un vettore di R^n tale che $Ax = b$ si può scrivere:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -B^{-1}N \\ I \end{bmatrix} x_N, \tag{10.9}$$

che equivale alla (10.7). □

Da un punto di vista geometrico, tenendo conto del fatto che $x \in P$ implica $x_j \geq 0$ per $j \in \mathcal{N}$, il risultato della Proposizione 10.3 si può esprimere anche nella forma:

$$P \subseteq \{\bar{x}\} + \text{Cone}(\{\eta_j : j \in \mathcal{N}\}),$$

(P è contenuto nella traslazione in $\bar{x}$ del cono generato dalle direzioni η_j).

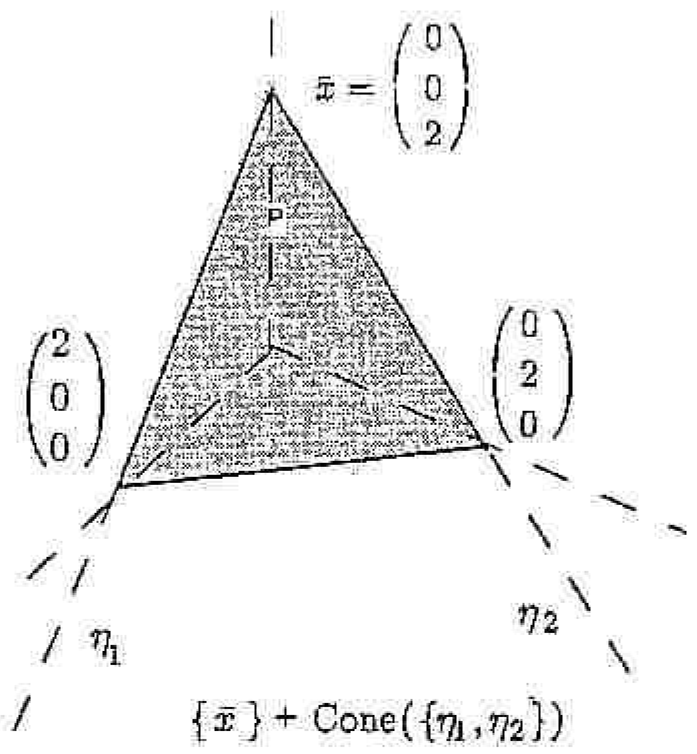

Fig.1. Spigoli passanti per il vertice $\bar{x}$ del poliedro in R^3 definito da: $P = \{x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad x \geq 0\}$.

10.3 Ottimalità di una soluzione ammissibile di base

Ci proponiamo qui di stabilire sotto quali condizioni una soluzione ammissibile di base

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $B^{-1}b \geq 0$ sia una soluzione ottima del problema di PL.
A tale scopo osserviamo innanzitutto che il problema assegnato, che abbiamo posto nella forma:

$$\begin{aligned} min \quad & c_B{}'x_B + c_N{}'x_N \\ & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B \geq 0, x_N \geq 0, \end{aligned}$$

equivale a un nuovo problema nelle sole variabili x_N, ricavato eliminando x_B, ossia ponendo:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Ignorando il termine costante $c'_B B^{-1}b$ nella funzione obiettivo, e tenendo conto del vincolo $x_B \geq 0$, si ottiene il *problema ridotto* equivalente:

$$\begin{aligned} min \quad & -c'_B B^{-1}Nx_N + c'_N x_N \\ & B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \geq 0, \\ & x_N \geq 0, \end{aligned}$$

che si può riscrivere nella forma

$$\begin{aligned} min \quad & \bar{c}'_N x_N \\ & B^{-1}Nx_N \leq B^{-1}b, \\ & x_N \geq 0 \end{aligned} \tag{10.10}$$

dove il vettore $\bar{c}_N$, detto vettore dei *coefficienti di costo ridotto* è definito ponendo

$$\bar{c}_N = c_N - N^T(B^{-1})^T c_B. \tag{10.11}$$

Osserviamo che $\bar{c}_N \in R^{(n-m)}$ e che le componenti di tale vettore sono date da

$$\bar{c}_j = c_j - c'_B B^{-1}A_j, \quad \text{per} \quad j \in \mathcal{N}.$$

Se definiamo un vettore $\pi \in R^m$, detto anche *moltiplicatore*, come soluzione del sistema:

$$B^T \pi = c_B,$$

ossia assumiamo:

$$\pi = (B^{-1})^T c_B,$$

si può anche porre

$$\bar{c}_j = c_j - \pi' A_j, \quad \text{per} \quad j \in \mathcal{N}. \tag{10.12}$$

Nella proposizione successiva è riportata un'importante ulteriore caratterizzazione dei coefficienti di costo ridotto.

Proposizione 10.4 *Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile di base e siano η_j, con $j \in \mathcal{N}$, i vettori definiti nella* (10.3). *Allora per ogni $q \in \mathcal{N}$ si ha:*

(i) *il coefficiente di costo ridotto $\bar{c}_q$ coincide con la* derivata direzionale della funzione obiettivo lungo la direzione di η_q, *ossia:*

$$\bar{c}_q = c' \eta_q; \tag{10.13}$$

(ii) *se $\bar{c}_q < 0$ la direzione η_q è una direzione di discesa per la funzione obiettivo in $\bar{x}$ e in particolare, se si assume $x(\theta) = \bar{x} + \theta \eta_q$, risulta:*

$$c' x(\theta) = c' \bar{x} + \theta \bar{c}_q < c' \bar{x} \quad \text{per ogni} \quad \theta > 0. \tag{10.14}$$

Dim. Si assuma $q = j_{m+k}$. Ricordando la (10.3) si può scrivere

$$\begin{aligned} c' \eta_q &= c'_B(-B^{-1} A_q) + c'_N e_k \\ &= -c'_B B^{-1} A_q + c_q \\ &= \bar{c}_q, \end{aligned}$$

il che prova la (10.13). Poiché c è il gradiente della funzione obiettivo $z = c'x$, l'espressione (10.13) mostra che il coefficiente di costo ridotto $\bar{c}_q$ è la derivata direzionale della funzione obiettivo lungo la direzione η_q e quindi vale la (i). Dalla (i) segue poi immediatamente la (ii). □

Notiamo che la funzione obiettivo del problema ridotto è uguale a zero in $\bar{x}_N = 0$ (che è un punto ammissibile per il problema ridotto) e quindi, *se tutti i coefficienti di costo ridotto sono non negativi*, $\bar{x}_N$ è una soluzione ottima del problema ridotto e la soluzione ammissibile di base assegnata $\bar{x}$ è una soluzione ottima del problema (10.1).

Più precisamente, utilizzando le Proposizioni 10.2 e 10.3 possiamo enunciare il Teorema seguente.

Teorema 10.1 *Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile di base del problema (10.1) corrispondente alla base B. Allora :*

(i) *se i coefficienti di costo ridotto*

$$\bar{c}_j = c_j - c'_B B^{-1} A_j, \quad j \in \mathcal{N}$$

sono tutti non negativi, $\bar{x}$ è una soluzione ottima del problema (10.1);

(ii) *se $\bar{c}_j > 0$ per tutti gli indici $j \in \mathcal{N}, \bar{x}$ è l'unica soluzione ottima;*

(iii) *se $\bar{c}_j \geq 0$ per tutti gli indici $j \in \mathcal{N}$ ed esistono indici $\{l_1, l_2, \ldots, l_r\} \subseteq \mathcal{N}$ tali che $\bar{c}_{l_1} = \bar{c}_{l_2} = \ldots = \bar{c}_{l_r} = 0$, , allora ogni punto ammissibile $x \in P$ della forma:*

$$x = \bar{x} + \sum_{i=1}^{r} \eta_{l_i} x_{l_i}$$

è una soluzione ottima del problema (10.1);

(iv) *se $\bar{x}$ è non degenere ed è soluzione ottima del problema (10.1) allora tutti i coefficienti di costo ridotto sono necessariamente non negativi.*

Dim. Gli enunciati del teorema sono una conseguenza diretta delle Proposizioni 10.2 e 10.3.
Infatti, per $x \in P$ si può scrivere:

$$x = \bar{x} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \eta_j x_j$$

e di conseguenza:

$$\begin{aligned} c'x &= c'\bar{x} + \sum_{j \in \mathcal{N}} c'\eta_j x_j \\ &= c'\bar{x} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j, \end{aligned}$$

con $x_j \geq 0$.
Se allora $\bar{c}_j \geq 0$ ne segue

$$c'x \geq c'\bar{x} \quad \text{per ogni} \quad x \in P$$

e ciò prova la (i).

Se poi $\bar{c}_j > 0$ per ogni $j \in \mathcal{N}$, si ha $c'x > c'\bar{x}$ per ogni $x \in P$ con $x \neq \bar{x}$ (si noti che, se $x \neq \bar{x}$ deve essere necessariamente $x_N \neq \bar{x}_N$ e quindi almeno una delle componenti non di base $x_j, j \in \mathcal{N}$ deve essere positiva).
Ciò dimostra la (ii).

Se $\bar{x}$ è una soluzione ottima e inoltre $\bar{c}_{l_1} = \bar{c}_{l_2} = \ldots = \bar{c}_{l_r} = 0$ e si assume

$$x = \bar{x} + \sum_{i=1}^{r} \eta_{l_i} x_{l_i}$$

risulterà

$$c'x = c'\bar{x} + \sum_{i=1}^{r} \bar{c}_{l_i} x_{l_i} = c'\bar{x}$$

e quindi tutti i punti ammissibili x così definiti sono soluzioni ottime, per cui vale la (iii).

Infine, supponiamo che $\bar{x}$ sia una soluzione ammissibile di base non degenere che sia anche soluzione ottima del problema di PL.
Supponiamo, per assurdo, che esista un c_j tale che $\bar{c}_j < 0$ e poniamo

$$x(\theta) = \bar{x} + \theta\eta_j.$$

Ricordando la Proposizione 10.2, si ha che per valori positivi sufficientemente piccoli di θ risulta $x(\theta) \in P$. D'altra parte, $c'x(\theta) = c'\bar{x} + \theta\bar{c}_j$. Per θ sufficientemente piccolo e positivo si avrebbe allora $x(\theta)$ ammissibile e $c'x(\theta) < c'\bar{x}$, il che contraddice l'ipotesi che $\bar{x}$ sia una soluzione ottima. □

Il teorema precedente fornisce una condizione *sufficiente* perchè una soluzione ammissibile di base assegnata sia una soluzione ottima. Tale condizione può anche essere riottenuta utilizzando la teoria della dualità.

Supponiamo infatti che $\bar{x}$, con $\bar{x}_B = B^{-1}b \geq 0$ e $\bar{x}_N = 0$ sia una soluzione ammissibile di base. Consideriamo il problema di PL nella forma:

$$\begin{array}{rl} min & c_B{}'x_B + c_N{}'x_N \\ & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B \geq 0, x_N \geq 0. \end{array}$$

Il problema duale si può scrivere:

$$\begin{array}{rl} max & b'u \\ & B^T u \leq c_B, \\ & N^T u \leq c_N \end{array}$$

La soluzione ammissibile di base sarà allora una soluzione ottima se e solo se esiste $u^* \in R^m$ tale che:

$$\begin{array}{lll} B^T u^* \leq c_B, & N^T u^* \leq c_N & \text{(ammissibilità duale)} \\ \bar{x}'_B(B^T u^* - c_B) = 0 & \bar{x}'_N(N^T u^* - c_N) = 0 & \text{(complementarità)} \end{array}$$

Ricordando che $\bar{x}_N = 0$, se si assume:

$$u^* = \left(B^T\right)^{-1} c_B \tag{10.15}$$

le condizioni di complementarità sono soddisfatte in $\bar{x}$ e quindi, per l'ammissibilità duale, la condizione di ottimalità diviene:

$$N^T \left(B^T\right)^{-1} c_B \leq c_N,$$

ossia:

$$c_N - N^T \left(B^T\right)^{-1} c_B \geq 0,$$

che corrisponde alla non negatività dei coefficienti di costo ridotto.
Tale condizione è, in generale solo sufficiente, in quanto la (10.15) potrebbe non valere necessariamente all'ottimo. Tuttavia, se la soluzione ammissibile di base è non degenere, ossia se $\bar{x}_B = B^{-1}b > 0$, per le condizioni di complementarità deve valere necessariamente la (10.15) e quindi la non negatività dei coefficienti di costo ridotto risulta anche una condizione necessaria.
Nel caso degenere è posssibile dimostrare che deve esistere una base associata a un vertice ottimo tale che i corrispondenti coefficienti di costo ridotto sono non negativi. Più esattamente vale il teorema seguente.

Teorema 10.2 *Sia x^* una soluzione ottima del problema* (10.1) *e supponiamo che x^* sia un vertice dell'insieme ammissibile. Allora esiste una base B^* tale che i coefficienti di costo ridotto corrispondenti sono tutti non negativi.*

(*) Dim. Senza perdita di generalità supponiamo che $x_j^* > 0$ per $j = 1 \dots, p$. Se $p = m$ il punto x^* è una soluzione ammissibile di base non degenere relativamente alla base formata con le prime m colonne di A e l'enunciato è una conseguenza del teorema precedente. Supponiamo quindi che $p < m$. Per la teoria della dualità deve esistere una soluzione u del problema duale tale che:

$$A'u \leq c, \quad A_j'u = c_j, \quad j = 1, \dots, p.$$

Inoltre, essendo x^* un vertice deve essere

$$r(\{A_j, \quad j = 1, \dots, p\}) = p.$$

Sappiamo anche, in base ai risultati stabiliti nel capitolo precedente, che il poliedro definito dai vincoli duali ammette vertici, poiché

$$r(A') = r(A) = m.$$

A partire da u possiamo allora raggiungere un vertice u^* dell'insieme ammissibile duale in cui almeno m vincoli duali sono soddisfatti all'eguaglianza e i primi p

vincoli continuano ad essere attivi, ossia esistono $m-p$ colonne di A, indicate con $A_{j_1}, \ldots, A_{j_{(m-p)}}$ tali che:

$$A_j' u^* = c_j, \quad j = 1, \ldots, p, \quad A_{j_k} u^* = c_{j_k}, \quad k = 1 \ldots, m-p.$$

Poiché la matrice dei coefficienti dei vincoli attivi in u^* deve avere rango m (essendo u^* un vertice) per noti risultati sull'indipendenza lineare le colonne $A_{j_1}, \ldots, A_{j_{(m-p)}}$ possono essere scelte in modo tale che sia:

$$r(B^*) = m,$$

avendo posto:

$$B^* = \left(A_1 \quad \ldots \quad A_p \quad A_{j_1} \quad \ldots \quad A_{j_{(m-p)}} \right).$$

Assumendo B^* come matrice di base in x^* (il che è lecito, in quanto x^* è una soluzione ammissibile di base rispetto a B^*) si avrà allora:

$$B^{*T} u^* = c_{B^*}.$$

La non negatività dei coefficienti di costo ridotto relativi a tale base segue allora dai restanti vincoli duali (che devono essere soddisfatti essendo u^* ammissibile per il duale), ossia dal sistema:

$$N^{*T} u^* \leq c_{N^*},$$

dove si è indicato con N^* la matrice formata con le colonne di A non in B^*. □

10.4 Spostamento da un vertice

Supponiamo ora che nella soluzione ammissibile di base assegnata $\bar{x}$ i coefficienti di costo ridotto *non* siano tutti non negativi.
Ci proponiamo di stabilire sotto quali condizioni sia possibile determinare una nuova soluzione ammissibile di base con un valore non superiore della funzione obiettivo.
Sappiamo che in $\bar{x}$ devono essere soddisfatte le n equazioni:

$$Bx_B + Nx_N = b$$
$$x_N = 0.$$

Fissata una variabile non di base, sia ad esempio x_q, si può tentare di spostarsi parallelamente agli $n-1$ iperpiani:

$$Ax = b, x_j = 0, j \in \mathcal{N}, j \neq q$$

o, equivalentemente, spostarsi perpendicolarmente alle normali a tali iperpiani.
Dai risultati precedenti sappiamo già che una direzione perpendicolare alle normali agli $n-1$ iperpiani considerati è data dalla colonna η_q della matrice M^{-1} definita nella (10.3).

Per semplificare le notazioni, supponiamo fissato q e indichiamo con $w \in R^m$ la soluzione del sistema

$$Bw = A_q,$$

ossia poniamo

$$w = B^{-1}A_q.$$

Ricordando la (10.3) e supponendo $q = j_{m+k}$ si può scrivere:

$$\eta_q = \begin{pmatrix} -w \\ e_k \end{pmatrix}, \tag{10.16}$$

dove $e_k \in R^{(n-m)}$.

A partire da $\bar{x}$ possiamo tentare di spostarci lungo la direzione η_q facendo diventare nulla una componente di $x_B(\theta)$ (che uscirà quindi dalla base) e rendendo positiva $x_q(\theta) = \theta$ (che entra a far parte delle nuove variabili di base).

Poiché inoltre si vuole ottenere una diminuzione della funzione obiettivo (o almeno evitare che la funzione obiettivo possa aumentare, occorre limitarsi a prendere in considerazione quelle direzioni η_q per cui il coefficiente di costo ridotto corrispondente $\bar{c}_q$ è negativo.

Può tuttavia accadere che l' obiettivo sia illimitato inferiormente sull'insieme ammissibile nella direzione di η_q, il che implica che il problema di ottimo non ha soluzione.

Una condizione *sufficiente* perché ciò si verifichi è data nel teorema successivo.

Teorema 10.3 (Condizione di illimitatezza)

Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile di base. Se il coefficiente di costo ridotto $\bar{c}_q$ è negativo e il vettore:

$$w = B^{-1}A_q$$

ha componenti tutte non positve *allora la funzione obiettivo $z = c'x$ è illimitata inferiormente sull'insieme ammissibile e la direzione η_q è una direzione del poliedro P.*

Dim. Sia $\bar{c}_q < 0$ e si consideri la semiretta

$$x(\theta) = \bar{x} + \theta\eta_q, \quad \text{con} \quad \theta \geq 0.$$

Si ha, per definizione,

$$x_B(\theta) = \bar{x}_B - \theta w$$

e quindi, se $w \leq 0$ risulta $x_B(\theta) \geq 0$ per ogni $\theta \geq 0$.

Ricordando la Proposizione 10.2 si ha allora che $x(\theta)$ è un punto ammissibile per ogni $\theta \geq 0$.

Inoltre:

$$c'x(\theta) = c'\bar{x} + \theta\bar{c}_q$$

e quindi, essendo $\bar{c}_q < 0$, per $\theta \to \infty$ si ha

$$c'x(\theta) \to -\infty,$$

il che prova che la funzione obiettivo è illimitata inferiormente sull'insieme ammissibile.

La direzione η_q è ovviamente una direzione di P, poiché soddisfa

$$A\eta_q = 0, \quad \eta_q \geq 0. \quad \square$$

Supponiamo ora che il vettore $w = B^{-1}A_q$ abbia almeno una componente positiva. In tal caso possiamo costruire una nuova soluzione ammissibile di base e tentare di raggiungere un vertice adiacente attraverso uno spostamento lungo η_q.

Dimostriamo il risultato seguente.

Teorema 10.4 *Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile di base. Supponiamo che esista un coefficiente di costo ridotto $\bar{c}_q < 0$ e che il vettore $w = B^{-1}A_q$ abbia almeno una componente positiva. Sia*

$$\theta = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{x}_{j_i}}{w_i} : w_i > 0 \right\}$$

e sia p un indice per cui:

$$\theta = \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_p}.$$

Allora il vettore

$$\tilde{x} = \bar{x} + \theta \eta_q,$$

con componenti:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{j_i} &= \bar{x}_{j_i} - \theta w_i = \bar{x}_{j_i} - \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_p} w_i, \quad j_i \in \mathcal{B}, \quad i = 1, \ldots, m \\ \tilde{x}_q &= \theta = \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_p} \\ \tilde{x}_j &= 0, \quad j \in \mathcal{N}, \quad j \neq q \end{aligned}$$

è una soluzione ammissibile di base e si ha:

$$c'\tilde{x} = c'\bar{x} + \theta \bar{c}_q \leq c'\bar{x}$$

Se $\bar{x}$ è non degenere, risulta

$$c'\tilde{x} < c'\bar{x}.$$

Dim. La scelta fatta per θ assicura che sia:

$$\frac{\bar{x}_{j_i}}{w_i} \geq \theta$$

(perchè θ è il minimo di tali rapporti), per ogni i tale che $w_i > 0$ e che si possa porre:

$$\theta = \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_p} \geq 0$$

(j_p è un indice delle variabili di base per cui si ha il minimo). Di conseguenza, si ha: :

$$\tilde{x}_{j_i} = \bar{x}_{j_i} - \theta w_i = \bar{x}_{j_i} - \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_p} w_i \geq 0 \quad \text{per} \quad w_i > 0.$$

Se $w_i \leq 0$ si ha anche $\bar{x}_{j_i} - \theta w_i \geq 0$ e quindi si può concludere

$$\tilde{x}_{j_i} \geq 0 \quad \text{per} \quad i = 1, \ldots, m.$$

Inoltre, si ha

$$\tilde{x}_j = 0, \quad \text{per} \quad j \in \mathcal{N}, j \neq q$$

e

$$\tilde{x}_q = \theta \geq 0.$$

Il punto $\tilde{x}$ soddisfa quindi $\tilde{x} \geq 0$ e $A\tilde{x} = b$ (perchè $A\bar{x} = b$ e $A\eta_q = 0$) ed è un punto ammissibile. La definizione di θ assicura che sia:

$$\tilde{x}_{j_p} = \bar{x}_{j_p} - \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_p} w_p = 0.$$

Consideriamo ora la matrice $\tilde{B}$ formata con le colonne di B, sostituendo A_{j_p} (colonna che esce dalla base) con A_q (colonna che entra nella base).

Dobbiamo dimostrare che $\tilde{B}$ ha rango m.
In tal caso, infatti, $\tilde{x}$ è una soluzione ammissibile di base, in quanto $\tilde{x}$ è ammissibile e le *nuove* componenti non di base:

$$\tilde{x}_j, \quad j \in \mathcal{N}, \quad j \neq q, \quad \tilde{x}_{j_p}$$

sono tutte nulle.

Facciamo vedere che le colonne $A_{j_1}, \ldots, A_{j_{p-1}}, A_{j_{p+1}}, \ldots A_{j_m}, A_q$ sono linearmente indipendenti.

Supponiamo che sia:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{m} A_{j_i} \alpha_i + A_q \alpha_q = 0. \tag{10.17}$$

Per definizione, si ha:

$$A_q = Bw = \sum_{i=1}^{m} A_{j_i} w_i$$

e quindi si può scrivere:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{m} A_{j_i} (\alpha_i + w_i \alpha_q) + A_{j_p} w_p \alpha_q = 0$$

Essendo $A_{j_1}, \ldots, A_{j_m}$ linearmente indipendenti, deve essere:

$$w_p \alpha_q = 0, \quad \alpha_i + \alpha_q w_i = 0 \quad i = 1 \ldots m, i \neq p.$$

Essendo $w_p > 0$ ciò implica $\alpha_q = 0$ e quindi, per la (10.17) e l'indipendenza lineare delle colonne di B, si ha

$$\alpha_i = 0, i = 1, \ldots, m, i \neq p.$$

Si può allora concludere che la (10.17) implica

$$\alpha_i = 0, i = 1, \ldots, m, i \neq p, \quad \alpha_q = 0$$

e ciò prova che $\tilde{B}$ ha rango m e, di conseguenza, che $\tilde{x}$ è una soluzione ammissibile di base.
Essendo $\tilde{x} = \bar{x} + \theta\eta_q$ si ha:

$$c'\tilde{x} = c'\bar{x} + \theta c'\eta_q = c'\bar{x} + \theta\bar{c}_q$$

e quindi $\bar{c}_q < 0$ implica

$$c'\tilde{x} \leq c'\bar{x}.$$

Se il punto $\bar{x}$ è non degenere tutte le componenti di base (nella vecchia base) $\bar{x}_{j_i}, i = 1, \ldots, m$ sono positive e quindi $\theta > 0$, il che assicura (essendo $\bar{c}_q < 0$) :

$$c'\tilde{x} = c'\bar{x} + \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_p}\bar{c}_q < c'\bar{x}. \quad \square$$

Osservazione 1

Nel calcolo di θ definito nell'enunciato del Teorema 10.4 si possono presentare due situazioni:

$\theta > 0$ se tutte le componenti $\bar{x}_{j_i}$ tali che $w_i > 0$ sono positive. Ciò accade necessariamente se $\bar{x}$ è non degenere, ma può anche verificarsi se in corrispondenza a *tutte* le eventuali variabili di base nulle $\bar{x}_{j_i}$ si ha $w_i \leq 0$;

$\theta = 0$ se $\bar{x}$ è degenere e una delle componenti di base nulle corrisponde a un $w_i > 0$. Se $\theta = 0$ si ha ovviamente $\tilde{x} = \bar{x}$. $\square$

Osservazione 2

Si può notare che se esistono due (o più) componenti di $\bar{x}$ per cui:

$$\theta = \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_p} = \frac{\bar{x}_{j_r}}{w_r} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{x}_{j_i}}{w_i} : w_i > 0 \right\}$$

la nuova base $\tilde{x}$ avrà una (o più) componenti di base nulle e quindi sarà degenere.
$\square$

10.5 Metodo del simplesso

Sulla base dei risultati precedenti possiamo definire lo schema concettuale di un algoritmo (metodo del simplesso) per la ricerca di una soluzione ammmissibile di base ottima.

Sia $\mathcal{B} = \{j_1, \dots, j_m\}$, sia $B = [A_{j_1}, \dots A_{j_M}]$ una base assegnata, e sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile di base, definita da:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_B = B^{-1}b \geq 0, \quad \bar{x}_N = 0.$$

Possiamo definire l'algoritmo seguente.

METODO DEL SIMPLESSO

(1) Si calcolano i moltiplicatori π risolvendo il sistema:

$$B^T \pi = c_B$$

e si calcolano i coefficienti di costo ridotto:

$$\bar{c}_j = c_j - \pi' A_j \quad \text{per ogni } j \notin \mathcal{B}.$$

(2) Se $\bar{c}_j \geq 0$ per ogni $j \in \mathcal{N}$: STOP ($\bar{x}$ è una soluzione ottima).

(3) Si sceglie un $q \in \{j \in \mathcal{N} : \bar{c}_j < 0\}$.

(4) Si calcola il vettore w risolvendo il sistema:

$$Bw = A_q$$

se risulta $w \leq 0$: STOP (l' obiettivo è illimitato inferiormente).

(5) Si calcola:

$$\frac{\bar{x}_{j_p}}{w_p} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{x}_{j_i}}{w_i} : w_i > 0 \right\}$$

(6) Si aggiornano $\bar{x}, B$ e $\mathcal{B}$ (x_{j_p} lascia la base e x_q entra nella base):

$$\begin{aligned}
\bar{x}_{j_i} &= \bar{x}_{j_i} - \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_p} w_i, \quad i = 1, \dots, m \\
\bar{x}_q &= \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_p} \\
B &= [A_{j_1}, \dots A_{j_{p-1}}, A_q, A_{j_{p+1}} \dots A_{j_m}] \\
\mathcal{B} &= \{j_1, \dots, j_{p-1}, q, j_{p+1}, \dots j_m\}
\end{aligned}$$

e si ritorna al passo (1). □

I teoremi 10.1, 10.3, 10.4 e l'esistenza di un numero finito di soluzioni ammissibili di base consentono di stabilire facilmente che se tutte le soluzioni ammissibili di base prodotte dall'algoritmo precedente sono non degeneri, l'algoritmo termina necessariamente in un numero finito di iterazioni, arrestandosi al passo (2), nel qual caso $\bar{x}$ è una soluzione ottima, oppure al passo (4), nel qual caso si può affermare che non esiste una soluzione ottima.

Se nel corso dell'algoritmo viene determinata una soluzione ammissibile di base degenere e se al passo (5) si ottiene

$$\theta = \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_p} = 0,$$

il punto rimane invariato e al passo (6) viene aggiornata la sola base B. In tale situazione, è possibile trovare esempi di *ciclaggio*, in cui, dopo un numero finito di iterazioni corrispondenti alla stessa soluzione $\bar{x}$, la base ritorna a coincidere con una di quelle già determinate e l'algoritmo cicla indefinitamente.

Per evitare tale possibilità è necessario introdurre regole opportune (regole anticiclaggio) che assicurino una terminazione finita.

Uno dei criteri per cui è possibile dimostrare la convergenza in un numero finito di passi è la cosiddetta *regola di Bland,* che è la più semplice da illustrare.

Regola di Bland (1977)

(a) Si definisce un ordinamento iniziale delle variabili;

(b) con riferimento all'ordinamento iniziale, la scelta dell'indice q definito al passo (3) relativo alla variabile che deve entrare nella base viene effettuata assumendo:

$$q = \min\{j : j \in \mathcal{N}, \bar{c}_j < 0\}$$

(ossia si sceglie l'indice più piccolo tra quelli per cui $\bar{c}_j < 0$

(c) la scelta dell'indice j_p al passo (5) viene effettuata, in caso di indeterminazione, assumendo:

$$j_p = \min\left\{j_k : \frac{x_{j_k}}{w_k} = \min_{1\le i\le m}\left\{\frac{x_{j_i}}{w_i} : w_i > 0\right\}\right\}$$

(ossia si sceglie l'indice più piccolo per definire la variabile che deve lasciare la base).

Altri criteri consistono nel *perturbare* i termini noti delle equazioni, oppure nell'assicurare un ordine *lessicografico* che eviti di ritornare su una stessa base.

In genere, però, i criteri anti-ciclaggio non assicurano una maggiore efficienza computazionale e possono, in qualche caso far deteriorare il comportamento del metodo.

Essi tuttavia sono di interesse, sia dal punto di vista teorico, in quanto consentono di dimostrare la convergenza finita, sia perchè alcuni problemi possono essere "strutturalmente" degeneri.

Nel caso generale la probabilità di ottenere una base degenere scegliendo casualmente i valori dei coefficienti b_i è molto bassa.

Si può osservare, infatti, che se una soluzione ammissibile di base è degenere, il vettore

$$b = A\bar{x} = B\bar{x}_B = \sum_{i=1}^{m} A_{j_i}\bar{x}_{j_i}$$

è esprimibile come combinazione lineare di, al più, $m-1$ vettori di R^m e quindi è un punto di R^m che appartiene ad un sottospazio lineare a dimensione minore di m.

Piccole perturbazioni di b, ad esempio del tipo:

$$b_i(\epsilon) = b_i + \epsilon^i, \quad i = 1, \dots, m$$

hanno l'effetto di rendere le soluzioni di base non degeneri, per valori comunque piccoli di ϵ.

Se le dimensioni del problema non sono particolarmente elevate la scelta di q al passo (3) può essere effettuata in modo tale che:

$$\bar{c}_q = \min\{\bar{c}_j, j \in \mathcal{N}, \bar{c}_j < 0\}$$

ossia facendo in modo che $\bar{c}_q$ sia il più piccolo tra i coefficienti di costo ridotto (il più grande in valore assoluto).

Un criterio alternativo può essere quello di scegliere q in modo tale che η_q sia la "direzione di discesa più ripida" (tra gli spigoli che hanno origine nel vertice corrente) rispetto alla funzione obiettivo, ossia ne minimizzi la derivata direzionale. Ciò equivale a richiedere:

$$\frac{c'\eta_q}{\|c\|\|\eta_q\|} = \min_{j\in\mathcal{N}} \left\{ \frac{c'\eta_j}{\|c\|\|\eta_j\|} \right\}$$

e comporta il calcolo aggiuntivo delle quantità $\|\eta_j\|^2 = \eta_j{}'\eta_j$.

Nessuno dei criteri finora noti grantisce tuttavia una maggiore efficienza computazionale e quindi, soprattutto se le dimensioni sono elevate, può essere preferibile far riferimento al primo coefficiente di costo ridotto negativo che si riesce a identificare.

Gli altri aspetti importanti che occorre precisare per definire completamete l'algoritmo riguardano le modalità con cui vengono risolti i sistemi lineari:

$$\begin{array}{ll} B^T\pi = c_B & \text{(passo (1))} \\ Bw = A_q & \text{(passo (4)).} \end{array}$$

In particolare, occorre definire le tecniche di soluzione più opportune in relazione ai seguenti obiettivi:

sfruttare il fatto che, da un'iterazione all'altra, si modifica una sola colonna della matrice B,

ridurre gli effetti dovuti agli errori numerici,

preservare la "struttura di sparsità" presente nella matrice A.