8

Vertici dei poliedri convessi

8.1 Generalità

Ci proponiamo nel seguito di riportare alcuni risultati essenziali sulla caratterizzazione dei vertici dei poliedri convessi.
In particolare, dopo aver introdotto alcune definizioni fondamentali, stabiliamo una condizione necessaria e sufficiente perché un punto appartenente a un poliedro convesso sia un punto estremo e dimostriamo che la nozione di punto estremo è equivalente a quella di faccia $0-$dimensionale (vertice).
Consideriamo successivamente il caso in cui il poliedro convesso è rappresentato in forma standard, ossia $P = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\}$ e ricaviamo una condizione necessaria e sufficiente perché $\bar{x} \in P$ sia un vertice di P.

Introduciamo inoltre la nozione di soluzione ammissibile di base, nell'ipotesi che A abbia rango m, e dimostriamo che $\bar{x} \in P$ è un vertice di P se e solo se $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile di base.

Infine, consideriamo poliedri descritti per mezzo di diseguaglianze, con vincoli espliciti di non negatività su tutte le variabili e mostriamo che sussiste una corrispondenza uno-ad-uno tra i vertici di un poliedro P nella forma:

$$P = \{x \in R^n; Ax \leq b, x \geq 0\}$$

e i vertici della sua rappresentazione in forma standard

$$P_s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : Ax + y = b, x \geq 0, y \geq 0 \right\}.$$

Il problema dell'*esistenza* dei vertici verrà considerato nel seguito.

8.2 Definizioni fondamentali

Definizione 8.1 (Poliedro convesso)

Definiamo poliedro convesso un insieme $P \subseteq R^n$ formato dall'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi, ossia:

$$P = \{x \in R^n : a_i'x \geq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, q\}. \quad \square$$

Definizione 8.2 (Politopo convesso)

Definiamo politopo (convesso) un poliedro convesso limitato. $\square$

Definizione 8.3 (Iperpiano di supporto)

Definiamo iperpiano di supporto di un insieme convesso C un iperpiano H tale che $H \cap \partial C \neq \emptyset$ e C sia contenuto in uno dei due semispazi chiusi associati a H. $\square$

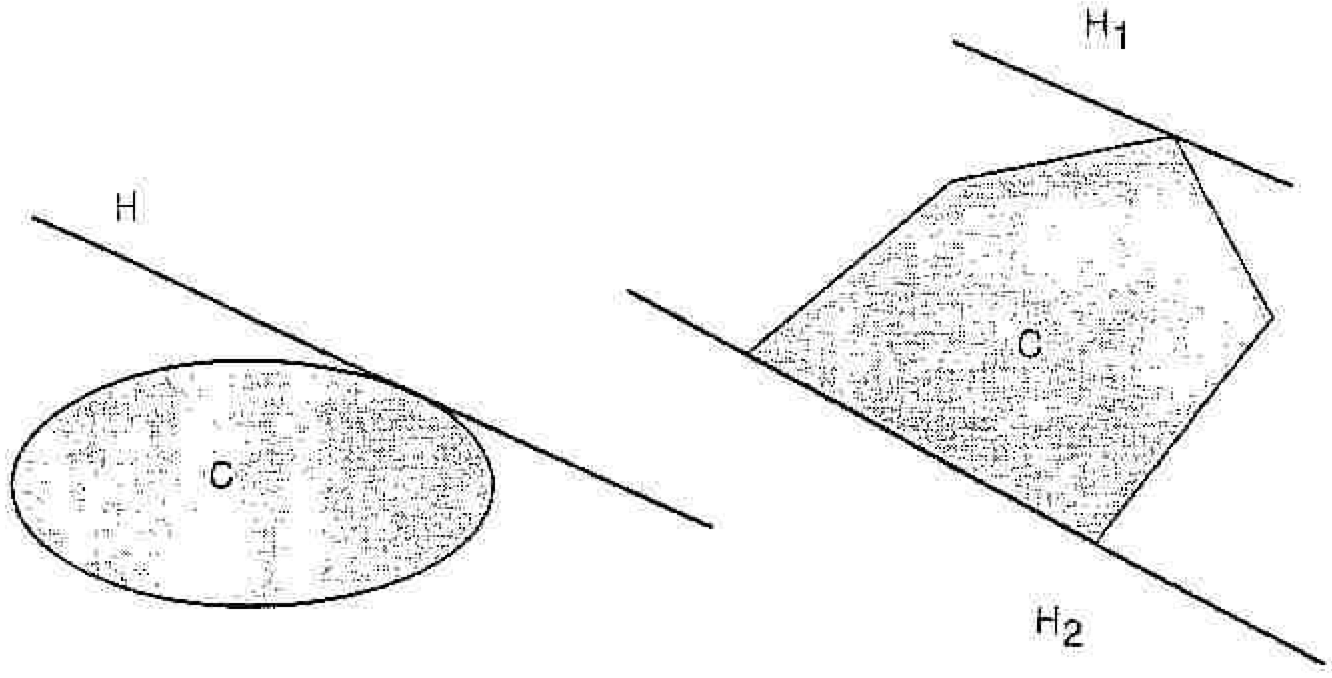

Fig. 1. Esempi di iperpiano di supporto

Definizione 8.4 (Faccia di un poliedro convesso)

Sia P un poliedro convesso e H un iperpiano di supporto di P. Definiamo faccia *di P l'intersezione $F = P \cap H$.* $\square$

Le facce dei poliedri convessi possono essere classificate in base alla loro "dimensione".

A tale scopo richiamiamo la nozione di "dimensione di un insieme" a cui si farà riferimento. Si ricordi che, in precedenza, la nozione di dimensione era stata introdotta esclusivamente con riferimento a uno spazio lineare.

Definizione 8.5 (Dimensione di un sottospazio affine)

Sia $S = \{x_0\} + W$ un sottospazio affine di R^n. Si dice dimensione (affine) di S la dimensione di W definita come massimo numero di elementi linearmente indipendenti di W.

Equivalentemente, si può definire dimensione (affine) di S il massimo numero di elementi affinemente indipendenti di S diminuito di 1.

Definizione 8.6 (Dimensione (affine) di un insieme)

Sia $F \subseteq R^n$. Si definisce dimensione (affine) di F il numero $\dim(F)$ dato dalla dimensione dell'involucro affine di F, ossia:

$$\dim(F) = \dim(\text{aff}(F)). \quad \square$$

Possiamo quindi indicare con $\dim(F)$ la dimensione di un qualsiasi insieme $F \subseteq R^n$.

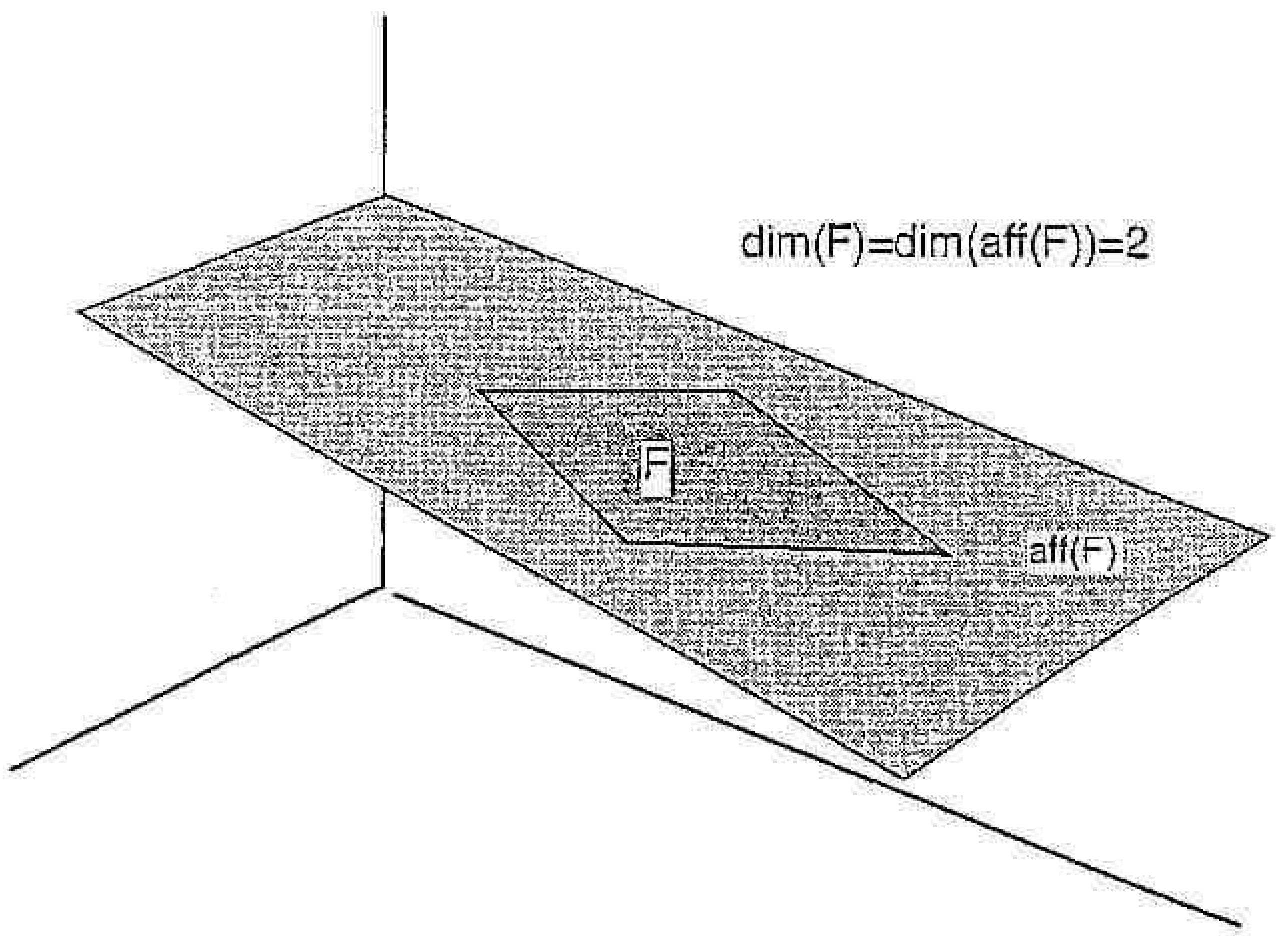

Fig. 2. Insieme in R^3 di dimensione 2

Con riferimento ai poliedri convessi consideriamo la definizione seguente.

Definizione 8.7 (Vertice, spigolo, "faccetta")

Sia P un poliedro convesso. Un vertice *di P è una faccia di dimensione* 0*; uno* spigolo *di P è una faccia di dimensione* 1*; una* "faccetta" *(facet) di P è una faccia di dimensione* $\dim(P) - 1$.

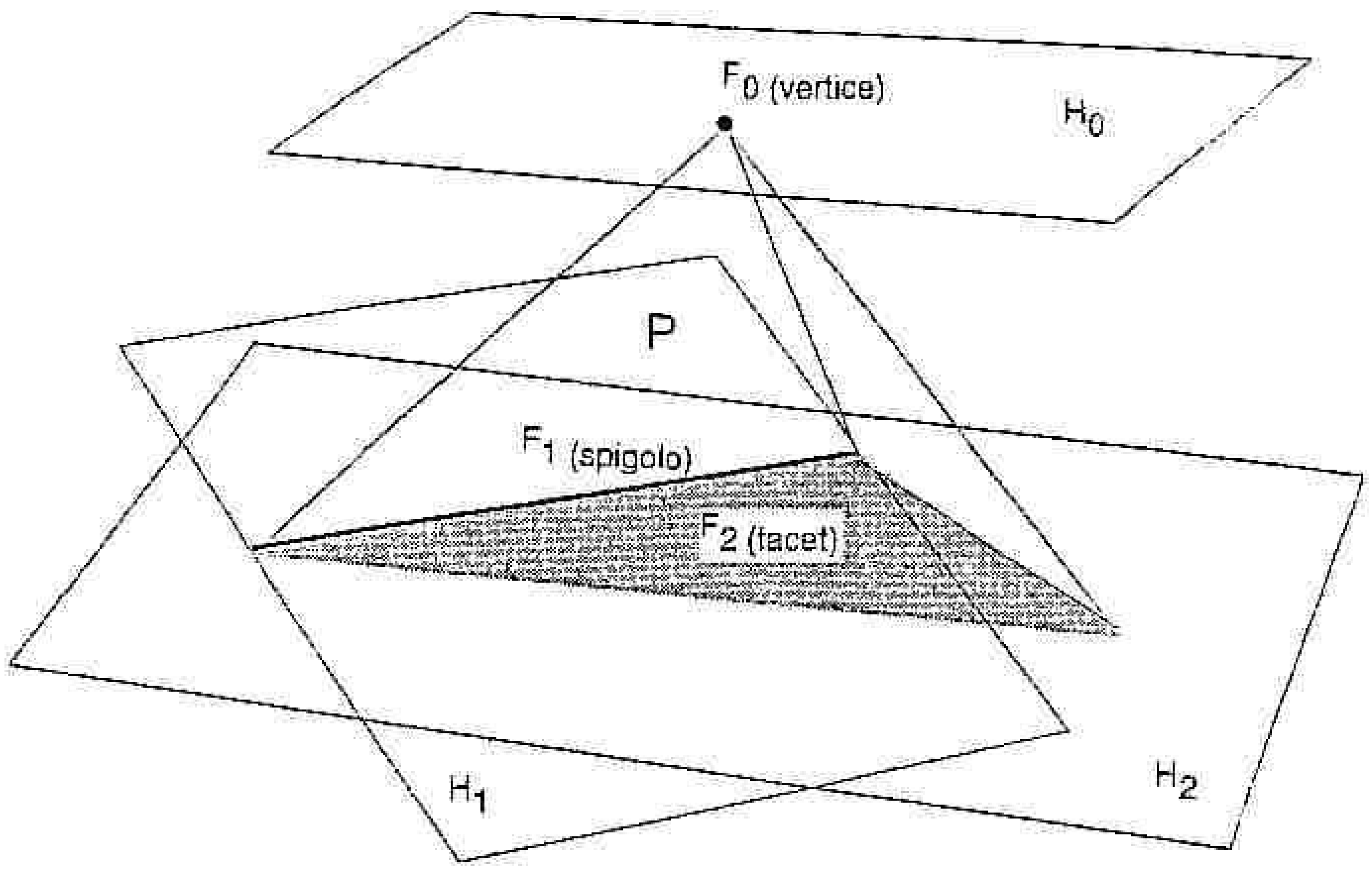

Fig. 3. Esempi di facce in R^3

8.3 Caratterizzazione dei punti estremi; equivalenza tra vertici e punti estremi

Consideriamo un poliedro convesso definito attraverso un sistema di diseguaglianze lineari:

$$P = \{x \in R^n : a_i' x \geq b_i, i = 1, 2, \ldots, q\},$$

in cui $a_i \in R^n, i = 1 \ldots, q$ (a_i è la normale all'iperpiano $a_i' x = b_i$,).

Definiamo, per ogni $x \in P$ l'insieme di indici:

$$I(x) = \{i : a_i' x = b_i\}.$$

L' insieme $I(x)$ individua *i vincoli attivi* nel punto x, ossia i vincoli che in x sono soddisfatti come vincoli di eguaglianza.

In quel che segue ci proponiamo di caratterizzare i punti estremi di P e di mostrare l'equivalenza tra il concetto di punto estremo e quello di vertice introdotto nella Def.8.7.

Premettiamo il seguente Lemma che verrà utilizzato nel seguito.

Lemma 8.1 *Se $x \in P$ non è punto estremo di P, esistono $x_a, x_b \in P$ tali che $x_a \neq x_b$ e $x = \frac{1}{2}x_a + \frac{1}{2}x_b$.*

Dim. Poiché $x \in P$ non è punto estremo di P, devono esistere $x_a, y \in P$ tali che $x_a \neq y$ e

$$x = (1-\lambda)x_a + \lambda y \qquad 0 < \lambda < 1.$$

Senza perdita di generalità possiamo supporre $\lambda < 1/2$. Assumendo quindi

$$x_b = (1-2\lambda)x_a + 2\lambda y$$

si ottiene ancora un punto di P (in quanto $0 < 2\lambda < 1$, per cui x_b è un punto interno del segmento $[x_a, y]$) e inoltre si ha:

$$\frac{1}{2}x_a + \frac{1}{2}x_b = \frac{x_a}{2} + \frac{x_a}{2} - \lambda x_a + \lambda y = (1-\lambda)x_a + \lambda y = x,$$

con $x_a \neq x_b$. □

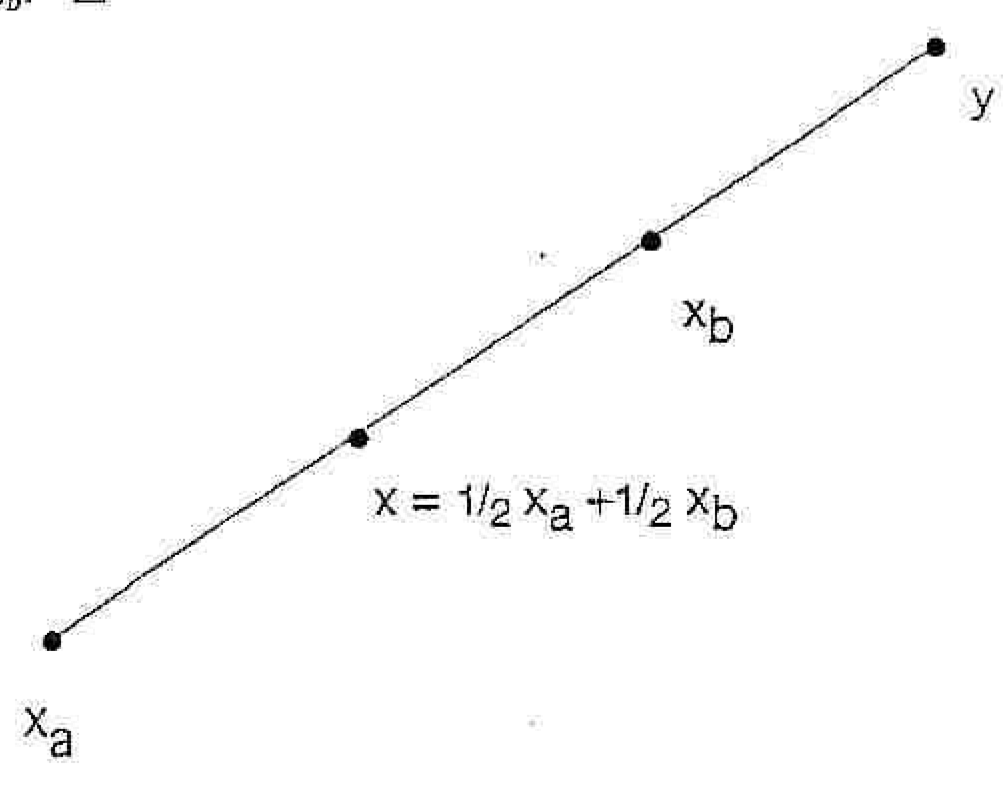

Fig. 4. Punto non estremo come punto di mezzo di un segmento

Il Teorema successivo fornisce una caratterizzazione algebrica dei punti estremi.

Teorema 8.1 *Un punto $x_0 \in P$ è un punto estremo di P se e solo se l'insieme delle normali ai vincoli attivi ha rango n, ossia se e solo se*

$$r(\{a_i, i \in I(x_0)\}) = n.$$

Dim. *Necessità.* Sia $x_0 \in P$ un punto estremo di P e sia $I(x_0)$ l'insieme degli indici dei vincoli attivi in x_0. Se il rango dell'insieme $\{a_i, i \in I(x_0)\}$ è minore di n il sistema di equazioni omogenee

$$a_i{}'s = 0, \qquad i \in I(x_0)$$

ammetterà una soluzione non nulla s_0. I vettori

$$x_a = x_0 + \gamma s_0, \qquad x_b = x_0 - \gamma s_0$$

soddisfano:

$$\begin{array}{ll} a_i{}'x_a = a_i{}'x_0 + \gamma a_i{}'s_0 = a_i{}'x_0 = b_i, & i \in I(x_0) \\ a_i{}'x_b = a_i{}'x_0 - \gamma a_i{}'s_0 = a_i{}'x_0 = b_i, & i \in I(x_0) \end{array}$$

e inoltre è possibile scegliere $\gamma > 0$ sufficientemente piccolo in modo tale che sia

$$a_i{}'x_a \geq b_i, \qquad a_i{}'x_b \geq b_i, \quad i \notin I(x_0)$$

(Ciò è possibile in quanto $a_i{}'x_0 > b_i$ per $i \notin I(x_0)$). Ne segue che $x_a, x_b \in P$ con $x_a \neq x_b$. D'altra parte, si ha:

$$x_0 = \frac{1}{2}x_a + \frac{1}{2}x_b$$

e quindi x_0 è un punto interno del segmento $[x_a, x_b]$, il che contraddice l'ipotesi che x_0 sia un punto estremo di P.

Sufficienza

Supponiamo che il rango di $\{a_i, i \in I(x_0)\}$ sia eguale a n. Se x_0 non è punto estremo di P devono esistere, per il Lemma 8.1, due punti $x_a, x_b \in P$ con $x_a \neq x_b$ tali che

$$x_0 = \frac{1}{2}x_a + \frac{1}{2}x_b.$$

Ne segue che per $i \in I(x_0)$ si può scrivere

$$b_i = a_i{}'x_0 = \frac{1}{2}[a_i{}'x_a + a_i{}'x_b]$$

e inoltre (essendo $x_a, x_b \in P$) si ha $a_i{}'x_a \geq b_i$ e $a_i{}'x_b \geq b_i$. Deve essere allora necessariamente

$$a_i{}'x_a = b_i, \qquad a_i{}'x_b = b_i, \quad \text{per ogni} \quad i \in I(x_0),$$

per cui il sistema

$$a_i{}'x = b_i, \qquad i \in I(x_0)$$

ammette più di una soluzione, il che contraddice l'ipotesi che il rango di $\{a_i, i \in I(x_0)\}$ sia eguale a n. □

Osservazione Si noti che il Teorema 8.1 non esclude che in un punto estremo possano esistere *più* di n vincoli attivi. □

Dal Teorema 8.1 derivano, in particolare, i corollari seguenti.

Corollario 8.1 *Se P è definito dall'intersezione di q semispazi chiusi, con $q < n$, allora non esistono punti estremi.* □

Corollario 8.2 *Il numero di punti estremi di un poliedro convesso è finito.*

Dim. Se $q < n$ non esistono punti estremi. Se $q \geq n$ si avranno, al massimo

$$\binom{q}{n} = \frac{q!}{(q-n)!n!}$$

combinazioni di indici per cui almeno n vincoli sono attivi. In base al Teorema 8.1 i punti estremi, se esistono, sono in numero non superiore a tali combinazioni. □

Dimostriamo ora che vertici (nel senso della Definizione 8.7) e punti estremi coincidono.

Teorema 8.2 *Sia P un poliedro convesso. Allora $x_0 \in P$ è un punto estremo di P se e solo se x_0 è un vertice di P.*

Dim. *Sufficienza.* Supponiamo che x_0 sia un vertice di P. Esiste allora un iperpiano di supporto $H = \{x : h'x = g\}$ tale che:

$$P \subseteq \{x : h'x \leq g\}, \qquad P \cap \{x : h'x = g\} = \{x_0\}.$$

Se $x_0 \in P$ non è un punto estremo si posssono trovare, per il Lemma 8.1, $x_a, x_b \in P$ tali che:

$$x_0 = \frac{1}{2}x_a + \frac{1}{2}x_b \quad \text{con} \quad x_a \neq x_b.$$

Deve essere, necessariamente,

$$h'x_a < g \qquad h'x_b < g$$

(altrimenti l'intersezione di H con P non sarebbe costituita solo da $\{x_0\}$) e quindi si ha:

$$h'x_0 = \frac{1}{2}h'x_a + \frac{1}{2}h'x_b < g,$$

il che contraddice $h'x_0 = g$.

Necessità. Supponiamo che x_0 sia un punto estremo di P. Per il Teorema 8.1 devono esistere (almeno) n vincoli attivi in x_0, tali che il rango dell'insieme $\{a_i, i \in I(x_0)\}$ sia eguale a n.

Definiamo l'iperpiano:

$$H = \left\{ x \in R^n : \sum_{i \in I(x_0)} a_i{}'x = \sum_{i \in I(x_0)} b_i \right\}.$$

(Per asssicurare

$$\sum_{i \in I(x_0)} a_i{}' \neq 0$$

si può considerare $I(x_0)$ come un sottoinsieme di n elementi dell'insieme degli indici dei vincoli attivi in x_0, scelti in modo tale che i vettori a_i, $i \in I(x_0)$ siano linearmente indipendenti.) Per ogni $x \in P$ si ha $a_i{}'x \geq b_i$, per cui risulta:

$$\sum_{i \in I(x_0)} a_i{}'x \geq \sum_{i \in I(x_0)} b_i.$$

Inoltre, $x_0 \in P \cap H$ e quindi H è un iperpiano di supporto per P in x_0.
Sia ora $y \in P \cap H$ un qualsiasi punto appartenente all'intersezione tra P e l'iperpiano H. Deve essere:

$$a_i{}'y \geq b_i, \quad i \in I(x_0) \quad \text{e} \quad \sum_{i \in I(x_0)} a_i{}'y = \sum_{i \in I(x_0)} b_i,$$

il che implica:

$$a_i{}'y = b_i, \quad i \in I(x_0).$$

Poiché il rango di $\{a_i, i \in I(x_0)\}$ è n (per il Teorema 8.1), la soluzione del sistema $a_i{}'x = b_i, i \in I(x_0)$ deve essere unica e quindi $y = x_0$. Ciò prova che $P \cap H = \{x_0\}$ e quindi che x_0 è un vertice nel senso della Definizione 8.7. $\square$

In base al Teorema 8.2 si può parlare, indifferentemente, di punti estremi o di vertici di un poliedro convesso.

Esempio 1. Consideriamo il poliedro convesso descritto dal sistema

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_3 \geq 0, \end{array}$$

e proponiamoci di stabilire se il punto

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è un vertice del poliedro.

Osserviamo che il punto è ammissibile e che in $\bar{x}$ sono attivi (ossia sono soddisfatti come eguaglianze) il primo, il secondo e il quarto vincolo, ossia

$$I(\bar{x}) = \{1, 2, 4\}.$$

Dobbiamo allora considerare il rango della matrice relativa al sistema costituito con i vincoli attivi in $\bar{x}$:

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ &x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ &x_3 = 0, \end{aligned}$$

ossia il rango della matrice:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

le cui righe sono costituite dai vettori $\{a_1, a_2, a_4\}$ che individuano le normali agli iperpiani passanti per $\bar{x}$.

Poichè $r(\bar{A}) = 3$, si può concludere che $\bar{x}$ è un vertice del poliedro.

Consideriamo ora il poliedro convesso definito da:

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 - x_3 \geq 4 \\ &x_1 + 1/2x_2 + x_3 \geq 2 \\ &x_1 \geq 0 \\ &x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

e il punto

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $\bar{x}$ è ammissibile e che sono attivi, come nel caso precedente, il primo, il secondo e il quarto vincolo.

In questo caso, tuttavia, la matrice dei coefficienti relativa ai vincoli attivi è data da:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha rango 2 e quindi $\bar{x}$ non è un vertice.

8.4 Caratterizzazione dei vertici dei poliedri in forma standard

Consideriamo ora, in particolare, i poliedri convessi rappresentati nella forma:

$$P = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\}.$$

Indicando con $a_i', i = 1 \dots m$ le righe di A, l'insieme P si può rappresentare, equivalentemente, come intersezione dei semispazi chiusi:

$$\begin{array}{rl} a_1'x \geq \ \ b_1, \ \dots, & a_m'x \geq \ \ b_m \\ -a_1'x \geq -b_1, \ \dots, & -a_m'x \geq -b_m \\ e_1'x \geq \ \ 0, \ \dots, & e_m'x \geq \ \ 0 \end{array}$$

in cui

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono le colonne della matrice identità $n \times n$.

Dal Teorema 8.1 possiamo allora ricavare facilmente la seguente caratterizzazione dei vertici di P, tenendo presente il fatto che, nel caso considerato, i vincoli attivi in un punto $\bar{x} \in P$ sono costituiti dai vincoli $Ax = b$ e dai vincoli $x_j = 0$ corrispondenti alle componenti nulle di $\bar{x}$.

Teorema 8.3 *Un punto $\bar{x} \in P$ è un vertice di P se e solo se le colonne di A corrispondenti alle componenti positive di $\bar{x}$, ossia $\{A_j : \bar{x}_j > 0\}$, sono linearmente indipendenti.*

Dim. In corrispondenza a un fissato $\bar{x} \in P$, possiamo sempre riordinare le variabili in modo che le prime p componenti di $\bar{x}$ siano positive e le restanti $n - p$ componenti siano nulle, ossia:

$$\bar{x}_j > 0, j = 1 \dots p, \quad \bar{x}_j = 0, \quad j = p+1, \dots, n.$$

Indicando con $A_1, A_2 \dots A_n$ le colonne di A possiamo partizionare A ponendo

$$A = [\bar{A} \quad Z], \quad \text{con} \quad \bar{A} = [A_1 \dots A_p] \quad Z = [A_{p+1} \dots A_n].$$

Per il Teorema 8.1, $\bar{x}$ è un vertice se e solo se il rango della matrice le cui righe sono costituite dalle normali ai vincoli attivi è pari a n, ossia se e solo se

$$n = r\left(\begin{bmatrix} A \\ -A \\ e'_{p+1} \\ \vdots \\ e'_n \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} A \\ e'_{p+1} \\ \vdots \\ e'_n \end{bmatrix}\right).$$

D'altra parte si ha:

$$\begin{bmatrix} A \\ e'_{p+1} \\ \vdots \\ e'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & Z \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix}$$

e quindi $\bar{x}$ è un vertice se e solo se:

$$r\left(\begin{bmatrix} \bar{A} & Z \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix}\right) = n,$$

che equivale, come è noto, alla condizione

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & Z \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad \text{implica} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0,$$

essendo $u \in R^p$ e $v \in R^{n-p}$.

Perché tale condizione sia soddisfatta è necessario e sufficiente che valga la condizione

$$\bar{A}u = 0 \quad \text{implica} \quad u = 0,$$

il che equivale a richiedere che $\bar{A}$ abbia rango p. □

Una conseguenza immediata del Teorema 8.3 è il corollario seguente:

Corollario 8.3 *Condizione* necessaria *perché $x \in P$ sia un vertice di P è che x non abbia più di m componenti positive.*

Dim. Segue dal fatto che le colonne A_j di A hanno m componenti e quindi non possono esistere più di m colonne linearmente indipendenti. □

Esempio 2. Consideriamo il poliedro convesso in forma standard descritto dal sistema

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ &x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

e proponiamoci di stabilire se il punto

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è un vertice. Osserviamo che $\bar{x}$ è un punto ammissibile, che ha positiva solo la prima componente. Deve essere quindi linearmente indipendente l'insieme costituito dalla sola colonna $A_1 = (2 \quad 1)'$, che è linearmente indipendente, essendo $A_1 \neq 0$. Si può quindi affermare che $\bar{x}$ è un vertice. □

Con riferimento al problema di PL in forma standard supponiamo ora che sia soddisfatta l'ipotesi seguente.

Ipotesi 8.1

La matrice A ha rango m (ossia esistono m colonne linearmente indipendenti di A). □

Introduciamo le seguenti definizioni e notazioni.

Definizione 8.8 (Matrice di base di A)

Definiamo base *di A una sottomatrice $B(m \times m)$ non singolare di A.* □

Indichiamo con $\mathcal{B}$ l'insieme degli indici delle colonne che formano la base, ossia poniamo:

$$\mathcal{B} \;=\; \{j_1, \ldots, j_m\}$$

e con $\mathcal{N}$ l'insieme degli indici delle colonne non di base:

$$\mathcal{N} \;=\; \{j_{m+1}, \ldots, j_n\}.$$

Il sistema $Ax = b$ si può allora riscrivere nella forma:

$$b = \sum_{j \in \mathcal{B}} A_j x_j + \sum_{j \in \mathcal{N}} A_j x_j.$$

Definiamo *variabili di base* le variabili $x_j, j \in \mathcal{B}$ e *variabili non di base* le variabili $x_j, j \in \mathcal{N}$.

Introducendo i vettori

$$x_B = [x_j], \;\; j \in \mathcal{B} \qquad x_N = [x_j], \;\; j \in \mathcal{N}$$

e le matrici

$$B = [A_{j_1} \ldots A_{j_m}], \quad N = [A_{j_{m+1}} \ldots A_{j_n}],$$

il sistema $Ax = b$ si può riscrivere nella forma:

$$Bx_B + Nx_N = b$$

ed è quindi risolubile rispetto a x_B per ogni fissato x_N.

Definizione 8.9 (Soluzione di base)

Sia B una base di A. Si definisce soluzione di base *del sistema $Ax = b$ un vettore $\bar{x} = (\bar{x}'_B \quad \bar{x}'_N)'$ formato dai sottovettori $\bar{x}_B \in R^m$, $\bar{x}_N \in R^{n-m}$ tali che*

$$\bar{x}_B = B^{-1}b \qquad \bar{x}_N = 0. \quad \square$$

Una soluzione di base per il sistema $Ax = b$ può, in generale, non essere ammissibile in quanto i vincoli di non negatività potrebbero essere violati. Consideriamo quindi la definizione seguente.

Definizione 8.10 (Soluzione ammissibile di base)

Sia B una base di A. Si definisce soluzione ammissibile di base *una soluzione di base relativa a B con componenti non negative, ossia tale che risulti:*

$$\bar{x}_B = B^{-1}b \geq 0 \qquad \bar{x}_N = 0. \quad \square$$

Si noti che nell'Ipotesi 8.1 esiste sempre una soluzione di base di $Ax = b$, ma potrebbe non esistere una soluzione ammissibile di base (relativa alla base fissata). Si mostrerà tuttavia in seguito che, se P non è vuoto, esiste sempre una base, a cui corrisponde una soluzione ammissibile di base. Notiamo anche che in una soluzione ammissibile di base alcune componenti del vettore $\bar{x}_B$ possono essere nulle.

Introduciamo la definizione seguente:

Definizione 8.11 (Soluzione ammissibile di base non degenere)

Una soluzione ammissibile di base si dice non degenere se $B^{-1}b > 0$; si dice degenere se esistono una o più componenti nulle di $\bar{x}_B$. $\square$

Osservazione

Se una soluzione ammissibile di base è non degenere essa è determinata dalla intersezione degli m iperpiani $Ax = b$ e degli $n - m$ iperpiani $x_N = 0$. Se $\bar{x}$ è degenere si avranno $p < m$ componenti positive di $\bar{x}_B$ ed il punto $\bar{x}$ soddisferà più di n equazioni, ossia $(m + n - p)$ equazioni.

È importante mettere in evidenza che ad una stessa soluzione ammissibile di base degenere, è possibile, in generale, associare diverse matrici di base. Il massimo numero di basi diverse che si possono associare ad uno stesso vertice è dato dalle diverse combinazioni possibili delle $n - p$ componenti nulle a gruppi di $n - m$ (colonne fuori dalla base), ossia è pari a:

$$\binom{n-p}{n-m} = \frac{(n-p)!}{(n-m)!(m-p)!}. \quad \square$$

Vogliamo ora mettere in relazione il concetto di soluzione ammissibile di base di un sistema in forma standard con quello di vertice di un poliedro convesso. Dal Teorema 8.3 otteniamo il seguente risultato:

Teorema 8.4 *Nell'Ipotesi 8.1, un punto $\bar{x} \in P$ è un vertice di P se e solo se $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile di base.*

Dim. Se $\bar{x} \in P$ è una soluzione ammissibile di base le eventuali componenti positive di $\bar{x}$ sono associate alle colonne di B, che sono, per ipotesi, linearmente indipendenti, quindi $\bar{x}$ è un vertice di P.

Inversamente, se $\bar{x}$ è un vertice di P le colonne corrispondenti alle $p \leq m$ componenti positive di $\bar{x}$ devono essere linearmente indipendenti. Poiché A ha rango m, tale insieme di colonne si può estendere (per un noto risultato sull'indipendenza lineare) in modo da formare una base B per A, tale che $\bar{x}$ sia la soluzione ammissibile di base corrispondente (necessariamente degenere). □

Esempio 3. Consideriamo nuovamente il poliedro dell'Esempio 2, ossia:

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ &x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

La matrice dei coefficienti dei vincoli di eguaglianza è data da:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una base di A è costituita dalla prima e dalla seconda colonna che sono linearmente indipendenti e quindi si può porre

$$\mathcal{B} = \{1,2\} \quad \mathcal{N} = \{3\},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Corrispondentemente si possono definire i vettori di base e non di base ponendo:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_N = x_3.$$

Per stabilire se la soluzione di base relativa a B è ammissibile, occorre assumere $\bar{x}_3 = 0$, e risolvere il sistema rispetto a x_1, x_2 ossia determinare la soluzione di:

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 = 4 \\ &x_1 - x_2 = 2 \end{aligned}$$

che è data da

$$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ed ha componenti non negative. Il punto $\bar{x}$ è quindi una soluzione ammissibile di base (degenere).

Notiamo che lo stesso punto si può considerare come soluzione ammissibile di base relativa alla base formata dalla prima e dalla terza colonna che sono anch'esse linearmente indipendenti. □

Esempio 4. Consideriamo ora il poliedro convesso in forma standard definito da:

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 1/2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x \geq 0. \end{array}$$

La matrice dei coefficienti dei vincoli di eguaglianza è data da:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il massimo numero di soluzioni di base è $\binom{4}{2} = 6$.

Consideriamo alcune delle possibili scelte.

$B = \{1, 2\}$: A_1 e A_2 non sono linearmente indipendenti; non si ha quindi una base;

$B = \{1, 3\}$: A_1 e A_3 sono linearmente indipendenti e quindi si ha la base

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

tuttavia, assumendo $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_4 = 0$ e risolvendo rispetto a x_1, x_3 si ottengono i valori $\bar{x}_1 = 5/3$, $\bar{x}_3 = -2/3$, per cui la soluzione di base non è ammissibile;

$B = \{1, 4\}$: A_1 e A_4 sono linearmente indipendenti e quindi si ha la base

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

assumendo $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = 0$ e risolvendo rispetto a x_1, x_4 si ottengono le componenti $\bar{x}_1 = 5/3$, $\bar{x}_4 = 2/3$, che sono non negative, per cui il punto

$$\bar{x} = (\,5/3 \quad 0 \quad 0 \quad 2/3\,)'$$

è una soluzione ammissibile di base e quindi è un vertice del poliedro. □