ESERCIZI DI CALCOLO DELLE PROBABILITA'

1. Un candidato si presenta ad un concorso in cui viene sottoposto ad una prova a quiz costituita da 8 affermazioni alle quali bisogna rispondere SI o NO. Si suppone che per superare la prova si debba rispondere correttamente a più di 6 domande. Quale è la probabilità che rispondendo a caso il candidato superi la prova? (27/5/97)

Risposta. *Come l'esercizio afferma, per superare la prova occorre rispondere correttamente a più di 6 domande quindi quello che occorre calcolare e' la* $P(x>6)$. *Per calcolare tale probabilità si consideri il fatto che le varie domande sono tra loro indipendenti quindi la distribuzione di riferimento che si deve considerare e' la distribuzione Binomiale di parametri n=8 e p=0.5 dove n rappresenta il numero di domande complessive. Per quando riguarda il valore di p si consideri che ogni domanda ha solo due risposte possibili e quindi la probabilità di rispondere correttamente è 0.5. Per cui la risposa conclusiva sarà data da* $P(x>6)=\binom{8}{7}\frac{1}{2}^{7}\frac{1}{2}^{1}+\binom{8}{7}\frac{1}{2}^{8}$

2. Un dado viene lanciato 2 volte. Si indichi con A l'evento "al primo lancio esce un numero minore o uguale a 2" e con B l'evento "al secondo lancio esce un numero uguale o superiore a 5". Calcolare la probabilità dell'evento unione di A e B. (3/6/97).

Risposta. *L'esercizio richiede che si calcoli la probabilità* $P(A\cup B)$. *Al fine del calcolo occorre stabilire se gli eventi A e B sono tra loro incompatibili ovvero se* $A\cap B=\varnothing$. *Per fare ciò scriviamo da quali elementi sono composti i due eventi A e B.*
$A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$ *mentre*
$B=\{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5),(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}$.
A questo punto è possibile osservare che l'evento $A\cap B=\{(1,5),(2,5),(1,6),(2,6)\}$ *ovvero dagli elementi comuni sia ad A che a B. Così per il principio delle probabilità totali si ha che*

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{12}{36}+\frac{12}{36}-\frac{4}{36}.$$

3. Si hanno tre scatole che contengono: la prima, 2 banconote da £100.000; la seconda, 1 banconota da £100.000 e 1 da £50.000; la terza, 2 banconote da £50.000. Si scelga a caso una delle tre scatole (tra loro equiprobabili) e si estragga una banconota. Risulta estratta una banconota da £100.000; quale è la probabilità che la scatola dalla quale è stata estratta sia la prima? (1/7/97)

Risposta. *Questo esercizio va risolto attraverso il teorema di Bayes. Avendo ipotizzato l'equiprobabilità di estrarre una delle tre scatole si ha che la probabilità a priori di estrarre una scatola qualsiasi è pari a 1/3. A questo punto se indichiamo con* S_1, S_2, S_3 *rispettivamente la prima, la seconda e la terza scatola e con C l'evento "estrazione di una banconota da £100.000" dobbiamo calcolare*

$$P(S_1|C)=\frac{P(S_1)P(C|S_1)}{P(S_1)P(C|S_1)+P(S_2)P(C|S_2)+P(S_3)P(C|S_3)}=\frac{\frac{1}{3}*1}{\frac{1}{3}*1+\frac{1}{3}*\frac{1}{2}+\frac{1}{3}*0}=\frac{2}{3}$$

4. In un palazzo vivono solo tre famiglie: A, B, C, di 4 componenti ciascuna. La famiglia A è composta da 4 maschi, la B da 3 maschi e 1 femmina, la C da 2 maschi e 2 femmine. Considerando equiprobabile l'uscita di un componente di una qualunque delle tre famiglie, si osserva che da protone esce una persona di sesso maschile. Quale è la probabilità che egli appartenga alla famiglia B?. (15/9/97)

Risposta. *Questo esercizio va risolto attraverso il teorema di Bayes. Considerando l'equiprobabilità dell'uscita dal portone di un componente di una qualunque delle tre famiglie si ha che P(A)=P(B)=P(C)=1/3. Indicando con M l'evento "l'individuo è maschio" dobbiamo calcolare*

$$P(B|M)=\frac{P(B)P(M|B)}{P(A)P(M|A)+P(B)P(M|B)+P(C)P(M|C)}=\frac{\frac{1}{3}*\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}*1+\frac{1}{3}*\frac{1}{4}+\frac{1}{3}*\frac{2}{4}}=0.143$$

5. Una persona ha due figli, di cui il maggiore è femmina. Nell'ipotesi che la determinazione del sesso dei due figli equivalga a due eventi indipendenti, calcolare la probabilità che anche il secondo figlio sia di sesso femminile. Come si modifica il risultato precedente se si ipotizza invece che la probabilità di avere due figli di sesso femminile sia pari a 1/3? (7/2/98)

Risposta. *In questo caso si tratta di calcolare una probabilità condizionata utilizzando il principio delle probabilità composte. Se indichiamo con MF l'evento "il figlio maggiore è femmina", con SF l'evento "il secondo figlio è femmina" e con EF l'evento "entrabi i figli sono femmine" occorre calcolare la* $P(SF|MF)=\frac{P(SF\cap MF)}{P(MF)}=\frac{P(EF)}{P(MF)}=\frac{P(SF)P(MF)}{P(MF)}=\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$. *Si noti che al numeratore la probabilità dell'intersezione viene scritta come prodotto delle probabilità dei due eventi a causa dell'indipendenza di questi. Nel caso in cui la probabilità di avere due figli entrambi femmine sia di 1/3 si ottiene*

$$P(SF|MF)=\frac{P(SF\cap MF)}{P(MF)}=\frac{P(EF)}{P(MF)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

6. Una scatola contiene 6 palline numerate da 1 a 6. Da questa scatola le palline vengono estratte senza reimmissione. Calcolare la probabilità che la pallina contrassegnata con il numero 1 venga estratta entro i primi tre tentativi. (26/2/98)

Risposta. *In questo caso non reimmetendo la pallina estratta di volta in volta nell'urna gli eventi non sono tra loro indipendenti, occorre così far uso delle probabilità condizionate. Se indichiamo con T1, T2, T3 rispettivamente la prima la seconda e la terza estrazione della pallina contrassegnata con il numero 1 e con* $T1^c, T2^c, T3^c$ *rispettivamente gli eventi: "la pallina contrassegnata con 1 non e' uscita alla prima estrazione", "la pallina contrassegnata con 1 non e' uscita alla seconda estrazione", "la pallina contrassegnata con 1 non e' uscita alla terza estrazione" dobbiamo calcolare la seguente probabilità*

$$P(T1)+P(T1^c)P(T2|T1^c)+P(T1^c)P(T2^c|T1^c)P(T3|T2^c)=\frac{1}{6}+\frac{5}{5}*\frac{1}{6}+\frac{5}{6}*\frac{4}{5}*\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

7. Una commissione giudicatrice di un concorso è formata da 10 persone, di cui 4 sono donne. Quale è la probabilità che, estraendo dalla predetta commissione una sottocommissione di 5 individui, in quest'ultima non vi sia nemmeno una donna (26/5/98)

Risposta. *In questo esercizio è ovvio che la sottocommissione viene estratta in blocco ovvero il modello sottostante è di un campionamento senza reimmissione. Risulta evidente quindi che la distribuzione sottostante l'esperimento è di tipo ipergeometrico. Se con X si intende la variabile aleatoria "numero di donne nella sottocommissione", bisogna quindi calcolare la probabilità di avere zero donne in questa commissione cioè:*

$$P(X=0)=\frac{\binom{4}{0}\binom{6}{5}}{\binom{10}{5}}.$$

8. Si considerino 3 urne, numerate da 1 a 3; ogni urna contiene 5 palline. La generica urna *i* contiene *i* palline bianche e (5-*i*) palline nere, con *i=1,2,3* (cioè, ad esempio, l'urna numero 2 contiene 2 palline bianche e 5-2=3 palline nere). Si estrae a caso un'urna, e da questa una pallina. Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia bianca. (26/5/98)

Risposta. *Indichiamo con B l'evento "estrazione di una pallina bianca" e con U1, U2, e U3 rispettivamente l'urna 1 la 2 e la 3. Allora per calcolare la probabilità di estratte una pallina bianca bisogna tenere conto del fatto che questa può essere stata estratta da una di queste urne che a loro volta hanno una loro probabilità di essere estratte (le urne sono equiprobabili).Allora*

$$P(B)=P(U1)P(B|U1)+P(U2)P(B|U2)+P(U3)P(B|U3)=\frac{1}{3}*\frac{1}{5}+\frac{1}{3}*\frac{2}{5}+\frac{1}{3}*\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

. Si noti che questa espressione non è altro che il denominatore del teorema di Bayes.

9. I clienti di una banca arrivano in modo casuale e si mettono in coda, mediamente, in ragione di 4 persone al minuto. Assumendo che l'ingresso in coda davanti allo sportello della banca in un dato intervallo di tempo segua una distribuzione di Poisson, determinare la probabilità che almeno un cliente entri in coda in mezzo minuto. (18/6/98).

IN questo caso occorre trovare quale e' il tasso in mezzo minuto. Per fare questo basta imposare la seguente proporzione: 4:1= λ *:0.5, da cui segue che* $\lambda=2$*. Se indichiamo che X la variabile "numero di clienti che arrivano in coda allo sportello della banca" la probabilità da calcolare diventa:*

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\exp(-2)\frac{2^0}{0!}=0.865.$$

10. In una data popolazione, una certa malattia si presenta con una frequenza di 1 persona ogni 1000 e la sua presenza può essere diagnosticata con un test che con una probabilità pari a 0,99 fornisce una risposta positiva qualora la persona sia effettivamente malata, ma che con una probabilità pari a 0,05 fornisce una risposta positiva qualora la persona sia invece sana. Valutare la probabilità che una persona che è risultata positiva al test sia effettivamente malata.

Se con M indichiamo la presenza della malattia, con S l'assenza di malattia e con il simbolo "+" il risultare positivo al test, si dispone delle seguenti informazioni: P(M)=0.001, P(+|M)=0.99, *P(+|S)=0.05. Allora la probabilità richiesta puo' essere calcolata tramite il teorema di Bayes nel seguente modo:*

$$P(M|+) = \frac{0.001 * 0.99}{0.001 * 0.99 + 0.05 * 0.999} = 0.0194$$

11. In un'urna vi sono N/2 palline bianche e N/2 palline nere. Si supponga di estrarre un campione con ripetizione di dimensione n = 10. Qualora la variabile casuale in questione sia quella relativa al numero di palline bianche in n estrazioni, è possibile che la distribuzione di tale variabile abbia varianza pari a 5 (<u>giustificare la risposta fornita</u>)? <u>Qualora</u> il risultato precedente sia stato giudicato inaccettabile, individuare quale dovrebbe essere la numerosità n per la quale la varianza risulterebbe pari a 5. (8/7/98).

*Per capire se la varianza può essere 5 occorre calcolare N in modo da ottenere la probabilità di estrarre una pallina bianca e quindi conseguentemente la probabilità di estrarre una pallina nera. Per fare questo basta considerare il fatto che N/2+N/2=1 e quindi N=1. Abbiamo così a che fare con una variabile X data da "numero di palline bianche in n estrazioni indipendenti" di tipo Bin(10,0.5). La varianza quindi di X e' data da Var(X)=10*0.5*0.5=2.5 che e' diversa da 5. L'unico modo per ottenere una varainza pari a 5 è quella di scegliere n=20.*

12. Si estraggono, <u>senza reimmissione</u>, due carte da un mazzo di 40 carte napoletane. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

a) le due carte estratte sono un 5 e una figura;
b) le due carte estratte sono un asso e una carta di bastoni.

Quali sarebbero le probabilità degli stessi eventi se l'estrazione delle carte avvenisse invece <u>con reimmissione</u>?