Esercizi di Calcolo delle Probabilità
(calcolo combinatorio)

1. Lanciamo due dadi regolari. Qual è la probabilità che la somma delle facce rivolte verso l'alto sia pari a 7?

Sol.: 1/6

2. Due palline vengono estratte da un'urna contenente 6 palline bianche e 5 nere. Qual è la probabilità che una delle palline estratte sia bianca e l'altra nera?

Sol.: 6/11

3. Viene costituito un comitato scegliendo 5 persone a caso da un gruppo di 6 uomini e 9 donne. Qual è la probabilità che nel comitato vi siano 3 uomini e 2 donne?

Sol.: $\dfrac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}}$

4. Nel poker una mano è costituita da 5 carte scelte a caso dal mazzo. Supponiamo di utilizzare un mazzo di 32 carte (in cui sono contenuti: 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A). Determinare la probabilità che il giocatore abbia

(a) scala reale (5 carte dello stesso seme in sequenza, con l'A che può stare prima del 7 o dopo il K);

(b) scala (5 carte, non tutte dello stesso, seme in sequenza);

(c) colore (5 carte dello stesso seme, non in sequenza);

(d) full (tre di un tipo e due di un altro, es. AAAKK);

(e) coppia (due d un tipo e tre diverse dalle precedenti e tra loro);

(f) poker (quattro dello stesso tipo ed una diversa).

Sol.: per tutti il denominatore è $\binom{32}{5}$. Il numeratore è

(a)$5 \cdot 4$; (b) $5 \cdot (4^5 - 4)$; (c) $4\binom{8}{5}$; (d) $8 \cdot 7\binom{4}{2}\binom{4}{3}$; (e) $4^3 \cdot 8\binom{4}{2}\binom{7}{3}$; (f) $8 \cdot 28$

5. Giocando 3 numeri al lotto su una ruota, qual è la probabilità di realizzare esattamente un ambo?

Sol.: $\dfrac{\binom{3}{2}\binom{87}{3}}{\binom{90}{5}}$

6. Qual è la probabilità di totalizzare k (con $0 \leq k \leq 13$) giocando una colonna al totocalcio?

Sol.: $\dfrac{\binom{13}{k}2^{13-k}}{3^{13}}$

7. Una popolazione è costituita da n individui. Ipotizzando di sapere che nessuno è nato il 29 febbraio, calcolare la probabilità che almeno 2 festeggino il compleanno nello stesso giorno.

Sol.: $1 - \dfrac{365!/(365-n)!}{365^n}$

8. Lanciamo una moneta 10 volte. Qual è la probabilità di ottenere:

(a) esattamente 3 teste;

(b) almeno 9 croci.

Sol.: Il denominatore è 2^{10} in entrambi i casi; il numeratore è

(a) $\frac{10!}{3!7!}$; (b) $1+10$

9. Lanciamo 5 dadi regolari. Qual è la probabilità che almeno 3 mostrino la stessa faccia?

Sol.: $\dfrac{6 \cdot 5^2 \cdot \binom{5}{3} + 6 \cdot 5 \cdot \binom{5}{4} + 6}{6^5}$

10. Un gruppo di $2N$ ragazze e $2N$ ragazzi viene diviso in 2 gruppi di uguale numerosità. Con che probabilità i 2 gruppi sono costituiti da un ugual numero di ragazzi e ragazze?

Sol.: $\dfrac{\binom{2N}{N}\binom{2N}{N}}{\binom{4N}{N}}$

11. Qual è la probabilità che in 5 lanci di una moneta non truccata esca testa almeno 3 volte in successione?

Sol.: $\dfrac{5+2+1}{2^5}$

12. k persone sono sedute in modo casuale su una fila di n sedie (con $n > k$). Qual à la probabilità che occupino k posti adiacenti?

Sol.: $\dfrac{n+1-k}{\binom{n}{k}}$

13. Al piano terra salgono su di un ascensore 7 persone. Tutti i passeggeri scendono tra il primo ed il decimo piano. Qual'è la probabilità che i passeggeri scendano tutti a piani diversi?

Sol.: $\dfrac{10!/3!}{10^7}$

14. Una squadra di calcio partecipa ad un torneo di 8 partite. Supponendo che in ogni partita i 3 risultati siano equiprobabili, qual è la probabilità che finisca il torneo con 5 vittorie, 2 sconfitte ed 1 pareggio?

Sol.: $\dfrac{\frac{8!}{5!2!1!}}{3^8}$

15. Date 28 persone, determinare la probabilità che le loro date di nascita siano distribuite così: 2 per mese in otto mesi e 3 per mese nei restanti 4 mesi.

Sol.: $\dfrac{\binom{12}{8}\binom{28}{16}\frac{16!12!}{2!^8 3!^4}}{12^{28}}$

16. Distribuiamo un intero mazzo di 52 carte tra 4 giocatori (che chiamiamo N, E, S, W) in modo che ciascuno ne riceva lo stesso numero. Calcolare la probabilità che

(a) tutte le carte di cuori vengano date allo stesso giocatore;

(b) ciascun giocatore riceva un Asso;

(c) le carte di cuori siano distribuite così: 6 a N, 4 a E, 2 a S, 1 a W.

Sol.: Il denominatore è $\frac{52!}{13!^4}$ per tutti i casi; il numeratore è

(a) $4\frac{39!}{13!^3}$; (b) $4!\frac{48!}{12!^4}$; (c) $\frac{39!}{7!9!11!12!}\frac{13!}{6!4!2!1!}$

17. Dato un gruppo di 7 amici, calcolare la probabilità che si verifichino gli eventi:

$A =$ "sono nati tutti in giorni della settimana diversi";

$B =$ "almeno 2 sono nati lo stesso giorno della settimana";

$C =$ "2 sono nati di domenica e 2 di martedì".

Sol.: $P(A) = \frac{7!}{7^7}$; $\quad P(B) = 1 - \frac{7!}{7^7}$; $\quad P(C) = \frac{\binom{7}{2}\binom{5}{2}5^3}{7^7}$

18. Vengono scelte a caso 12 persone tra un gruppo di 100. Qual è la probabilità che due particolari persone A e B vengano scelte?

Sol.: $\frac{\binom{98}{10}}{\binom{100}{12}}$

19. I 3 biglietti vincenti di una lotteria vengono estratti dall'urna dei 100 biglietti venduti. Determinare la probabilità di vincere per una persona che ha acquistato

(a) 4 biglietti;

(b) un biglietto.

Sol.: (a) $1 - \frac{\binom{96}{3}}{\binom{100}{3}}$; $\quad$ (b) $\frac{\binom{99}{2}}{\binom{100}{3}}$

20. Da un mazzo di 52 carte si estraeuna carta alla volta senza reinserire nel mazzo le carte estratte. Determinare la probabilità che:

(a) all'n-esima estrazione si estragga un asso;

(b) il primo asso venga estratto all'n-esima estrazione;

(c) il primo asso venga estratto dopo l'n-esima estrazione.

Sol.: Il denominatore è $\frac{52!}{(52-n)!}$ per tutti i casi; il numeratore è

(a) $4 \cdot \frac{51!}{(51-n+1)!}$, $n \leq 52$; $\quad$ (b) $4 \cdot \frac{48!}{(48-n+1)!}$, $n \leq 49$; $\quad$ (c) $\frac{48!}{(48-n)!}$, $n \leq 48$

21. Un'auto è parcheggiata in un parcheggio costituito da N posti macchina affiancati. Supponiamo che sia l'unica macchina parcheggiata e che non occupi i posti all'estremità del parcheggio. Dopo qualche tempo r degli N posti sono occupati. Qual è la probabilità che i due posti vicini alla prima macchina siano vuoti?

Sol.: $\frac{\binom{N-3}{r-1}}{\binom{N-1}{r-1}}$

22. Ogni pagina di un libro contiene N simboli di cui alcuni sono errori di stampa. Il libro ha n pagine e complessivamente contiene r errori. Qual è la probabilità che le pagine $1, 2, ..., n$ contengano rispettivamente $r_1, r_2, ..., r_n$ errori (con $\sum r_i = r$)?

Sol.: $\frac{\binom{N}{r_1}\binom{N}{r_2}\cdots\binom{N}{r_n}}{\binom{nN}{r}}$

23. Due palline vengono collocate a caso in 3 cassetti. Si ammette la possibilità che finiscano nello stesso cassetto. Qual è la probabilità che finiscano in cassetti diversi?

Sol.: $\frac{3 \cdot 2}{3^2}$

24. Supponiamo che ogni confezione di detersivo "Lavo" contenga un tagliando su cui è stampata una delle quattro lettere che compongono il suo nome. Se si raccolgono 4 tagliandi con tutte le lettere del nome si riceve una confezione gratis. Se tutte le lettere hanno la stessa probabilità di essere contenute in una confezione, qual è la probabilità che comprando quattro confezioni del detersivo si riesca ad avere una confezione gratis?

Sol.: $\dfrac{4!}{4^4}$

25. Estraiamo a caso 2 carte da gioco da un mazzo di 52. Qual è la probabilità che risulti "blackjack" (cioè che una carta è asso e l'altra una tra 10, J, Q, K)?

Sol.: $\dfrac{4 \cdot 16}{\binom{52}{2}}$

26. Un dado viene lanciato 4 volte in successione, qual' è la probabilità di osservare almeno una volta 6?

Sol.: $1 - \dfrac{5^4}{6^4}$

27. 2 dadi vengono lanciati contemporaneamente per n volte in successione. Qual è la probabilità che almeno una volta il risultato sia una coppia di 6?

Sol.: $1 - \dfrac{35^n}{36^n}$

28. Se N persone vengono ordinate in modo casuale su una linea retta, qual è la probabilità che le due persone A e B siano vicine? Quanto vale la stessa probabilità se le N persone vengono ordinate lungo il perimetro di un cerchio?

Sol.: $\dfrac{(N-1)!2!}{N!}$; $\qquad \dfrac{(N-2)!2!}{(N-1)!}$

29. Una signora ha n chiavi nello stesso portachiavi. Una sola apre la sua porta di casa. Calcolare la probabilità che riesca ad aprire la porta al k-esimo tentativo

(a) se ogni volta scarta che ha sbagliato chiave scarta la chiave;

(b) se non scarta le chiavi che non hanno funzionato?

Sol.: (a) $\dfrac{\dfrac{(n-1)!}{(n-1-k+1)!}}{\dfrac{n!}{(n-k)!}}$; $\qquad$ (b) $\dfrac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$

30. Un'urna contiene 3 palline rosse e 7 nere. Due giocatori, X e Y estraggono una pallina a turno dall'urna (prima X, poi Y, poi X e così via). Ciascuna pallina estratta non viene reinserita nell'urna. Vince chi estrae per primo pallina rossa. Determinare la probabilità che X vinca.

Sol.: $\dfrac{3}{10} + \dfrac{3 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8} + \dfrac{3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} + \dfrac{3 \cdot 3!}{10 \cdot 9 \cdot 8}$

31. L'urna A contiene 3 palline rosse e 3 nere, l'urna B contiene 4 palline rosse e 6 nere. Se scegliamo una pallina a caso da A e una da B, qual è la probabilità che siano dello stesso colore?

Sol.: $\dfrac{3 \cdot 4 + 3 \cdot 6}{6 \cdot 10}$

32. Un'urna contiene 5 palline nere, 6 blu ed 8 verdi. Se vengono estratte contemporaneamente 3 palline, determinare la probabilità che:

(a) siano tutte e 3 dello stesso colore;

(b) siano di 3 colori diversi;

Come cambiano le probabilità se l'esperimento viene ripetuto estraendo le 3 palline una alla volta e rimettendo dopo ciascuna estrazione la pallina estratta nell'urna?

Sol.: (a) $\dfrac{\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{8}{3}}{\binom{19}{3}}$; (b) $\dfrac{5\cdot 6\cdot 8}{\binom{19}{3}}$; (a') $\dfrac{5^3+6^3+7^3}{19^3}$; (b') $\dfrac{3!\cdot 5\cdot 6\cdot 8}{19^3}$

33. Gli appartenenti ad un gruppo di M ragazzi e F ragazze vengono ordinati in una fila in modo casuale. Qual è la probabilità la persona nella posizione i (con $1 \le i \le M+F$) sia una ragazza?

Sol.: $\dfrac{F}{M+F}$

34. In una foresta vive una colonia di 20 alci. 5 di queste vengono catturate, gli viene applicato un marchietto e poi vengono di nuovo liberate. Qualche tempo dopo 4 delle 20 alci vengono catturate. Qual è la probabilità che 2 delle 4 alci abbiano il marchietto di riconoscimento?

Sol.: $\dfrac{\binom{5}{2}\binom{15}{2}}{\binom{20}{4}}$

35. Supponiamo che 3 turisti arrivino, ciascuno per conto proprio, in una località in cui ci sono 5 alberghi. Se ogni turista sceglie a caso in quale albergo alloggiare, qual è la probabilità che alloggino in alberghi diversi?

Sol.: $\dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{5^3}$

36. In un quartiere vi sono 4 laboratori che riparano televisori. Nel quartiere 4 televisori si guastano nello stesso giorno e ciascuno dei proprietari sceglie a caso il laboratorio a cui rivolgersi. Qual è la probabilità che dal totale dei 4 proprietari vengano contattati k laboratori diversi (per $k = 1, ..., 4$)?

Sol.: $p_1 = \dfrac{4}{4^4}$; $p_2 = \dfrac{\binom{4}{2}(2^4-2)}{4^4}$; $p_3 = \dfrac{\binom{4}{3}\cdot \dfrac{4!}{2!1!^2}\cdot 3}{4^4}$; $p_4 = \dfrac{4!}{4^4}$

37. In uno scompartimento di un vagone ferroviario ci sono 6 posti: 3 rivolti nel senso di marcia e 3 in senso contrario. 3 uomini e 2 donne entrano nello scompartimento e si siedono scegliendo un posto a caso. Calcolare la probabilità che

(a) le 2 donne siano sedute una di fronte all'altra;

(b) 2 uomini siano seduti uno di fronte all'altro.

Sol.: (a) $\dfrac{3\cdot 2}{6\cdot 5}$ (b) $\dfrac{3\cdot 3\cdot 3}{6\cdot 5}$

38. In un cesto vi sono 20 paia di scarpe identiche (stesso modello, colore, taglia). Supponiamo di scegliere a caso dal cesto contenente le 40 scarpe (20 destre e 20 sinistre) coppie di scarpe per metterle ciascuna in una scatola. Calcolare la probabilità che

(a) non vi sia nessuna scatola contenente un vero paio di scarpe (una destra e una sinistra);

(b) il numero di scatole contenenti un vero paio di scarpe sia $2i$ (con $i \in \{1, 2, ..., 10\}$.

Sol.: Il denominatore è $\dfrac{40!}{2!^{20}\cdot 20!}$ in entrambi i casi; il numeratore è

(a) $(\dfrac{20!}{2^{10}\cdot 10!})^2$ (b) $\binom{20}{2i}^2(2i)!\dfrac{(20-2i)!}{2!^{10-i}(10-i)!}$

39. Date le 10 cifre $\{0, 1, ..., 9\}$, calcolare la probabilità che in un numero di k cifre (con la prima cifra diversa da 0, con k che può anche essere maggiore di 10):

(a) non si abbia mai lo 0;

(b) non si abbia mai 1;

(c) non si abbia né 0 né 1;

(d) almeno una delle due cifre 0 e 1 non si presenta.

Sol.: Il denominatore è sempre $9 \cdot 10^{k-1}$; il numeratore è

(a) 9^k; (b) $8 \cdot 9^{k-1}$; (c) 8^k; (d) $9^k + 8 \cdot 9^{k-1} - 8^k$

40. Scegliamo a caso 4 scarpe da 10 paia di scarpe identiche. Qual è la probabilità che tra le scarpe scelte ci sia almeno un paio?

Sol.: $\dfrac{1485}{\binom{20}{4}}$

41. Una persona scrive 3 lettere, le inserisce ciascuna in una busta e poi scrive i 3 indirizzi sulle buste già chiuse. Qual è la probabilità che almeno una delle buste avrà l'indirizzo corretto?

Sol.: $\sum_{i=1}^{3} \dfrac{(-1)^{i-1}}{i!}$

42. Si considerino tutti i numeri composti dalle permutazioni (senza ripetizione) delle 4 cifre $\{1, 2, 3, 4\}$. Qual è la probabilità che almeno un i venga a trovarsi al posto i-esimo?

Sol.: $\dfrac{4 \cdot 3! - \binom{4}{2} \cdot 2! + \binom{4}{3} - 1}{4!}$

43. Tre coppie si siedono in modo casuale intorno ad un tavolo rotondo.

(a) Qual è la probabilità che nessuna moglie sia seduta vicino al proprio marito?

(b) Come cambia il valore della probabilità precedente se le tre coppie siedono invce in modo casuale su una fila di posti al teatro?

Sol.: (a) $1 - \dfrac{3 \cdot 2 \cdot 4! - 3 \cdot 2!^2 \cdot 3! + 2!^3 \cdot 2!}{5!}$ (b) $1 - \dfrac{3 \cdot 5! \cdot 2! - 3 \cdot 2!^2 \cdot 4! + 2!^3 \cdot 3!}{6!}$

44. Supponiamo che le 52 carte di un mazzo vengano distribuite tra 4 giocatori in modo che ciascuno ne abbia 13. Qual è la probabilità che almeno un giocatore abbia tutte le carte dello stesso seme?

Sol.: $\dfrac{4 \cdot 4 \cdot \dfrac{39!}{13!^3} - 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \dfrac{26!}{13!^2} + 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 - 1}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}}$

45. Qual è la probabilità che una mano di 13 carte (scelte a caso da un mazzo di 52)

(a) non contenga nessuna carta di almeno un seme;

(b) contenga l'Asso e il K di almeno un seme;

(c) contenga tutte e 4 le carte di almeno uno tra i 13 tipi di carte contenuti nel mazzo.

Sol.: Il denominatore è sempre $\binom{52}{13}$; il numeratore è

(a) $4 \cdot \binom{39}{13} - 6 \cdot \binom{26}{13} + 4$; (b) $4 \cdot \binom{50}{11} - 6 \cdot \binom{48}{9} + 4\binom{46}{7} - \binom{44}{5}$; (c) $13 \cdot \binom{48}{9} - \binom{13}{2}\binom{44}{5} + \binom{13}{3}\binom{40}{1}$