

BILANCI CON THM REYNOLDS

↓
 Caso $\int_{a(t)}^{b(t)} f(t) dx =$ formula di Leibnitz ... e in + dimensioni? Ragionamento in 2D, poi generalizzato in 3D \rightarrow thm di Reynolds.

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dv = \int_V \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) dv + \oint f \underline{v} \cdot \underline{u} dS$$

↓
 Applicazione al bilancio di massa, con v.c. in movimento a $\underline{v} = \underline{v}_0$

- Due sist. di riferimento
 - Due bilanci da eguagliare poi
 - \underline{v}_0 in modo che fluido sia fermo \rightarrow definizione di velocità del fluido
- \hookrightarrow e quanto è uguale \underline{J}_R

↓
 Riscrittura bilancio

\hookrightarrow Modifica nel caso di v.c. che si deforma

↓
 Applicazione al bilancio di quantità di moto

- Due sistemi e due bilanci
- Attenzione a $\underline{q} = \underline{q}' + \rho \underline{v}_0$
- Introduzione prodotto tensoriale
- Arrivo alla formula di \underline{J}_R

\hookrightarrow Riscrittura del bilancio

\hookrightarrow Modifica nel caso di v.c. che si deforma

BILANCI IN FORMA DIFFERENZIALE

↓
 Scrittura bilanci e applicazione thm della divergenza

↓
 Bilanci in forma conservativa

↓
 Analisi dei prodotti tensoriali e scrittura della forma conservativa

↓
 caso $\rho = \text{cost}$

Derivata sostanziale

EQUAZIONI DEL FLUIDO VISCOSO

Hp di equilibrio locale: per migliorare, dipendenza dei flussi da $\nabla p, \nabla v$ e ∇e :

$$\underline{J_H} = \underline{J_H}(\rho, e, v) + a \nabla p + b \nabla e + c \nabla v$$

$$\underline{J_Q} = \underline{J_Q}(\rho, e, v) + a' \nabla p + b' \nabla e + c' \nabla v$$

Considerazioni:

x rendere flussi indipendenti da sist. di rif.:

$$a, b, c = 0 \quad a', b' = 0$$

(xk u. rettangolari)

e c'

N.B. costanti sono matrici

Per l'indipendenza, si possono applicare 3 operazioni:

Considerazioni
su rotazione
rigida

$$(\text{flusso nullo} \Rightarrow \underline{J_Q}^d = \underline{0})$$

Combinandole
insieme

$$\left. \begin{array}{l} \nabla v \rightarrow A \nabla v \\ \nabla v \rightarrow B \nabla v^T \\ \nabla v \rightarrow C (\nabla \cdot v) \underline{I} \end{array} \right\}$$

→ Riscrittura su il $\frac{2}{3}$
e definizione coefficienti di
viscosità

CASO $Re \ll 1$ (fluido viscoso)

- Considerazioni sulle opportunita' di semplificazioni (alla fine solo $Re \ll 1$)

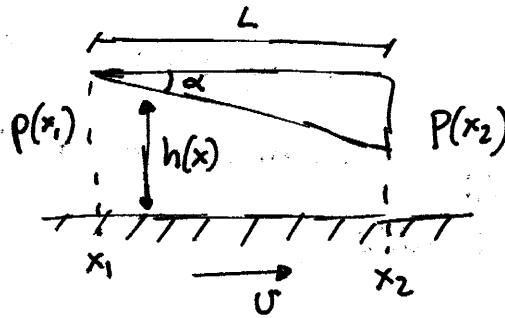
↓
 Cambio di variabili: $t' = \frac{t}{Re}$ $p' = pRe \rightarrow$ lim $Re \rightarrow 0 \rightarrow$ equazione di Stokes

LUBRIFICAZIONE

Introduzione e descrizione problema

Proporzionalita': $\frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{1}{h}$ $\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{1}{L}$

$\frac{\partial v}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow$ in eq. continuita': $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ poiche' $v(y=0) = 0$
 $v = 0 \forall y$



$p(x_1) = p(x_2)$
 $h \ll L$

hp: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ $p = \text{cost}$

Scrittura eq. di bilancio sugli assi e applicazione considerazioni

Se fosse $p_x = 0$ $Q = \frac{\sigma h(x)}{2}$ IMP.

Scrittura $u(y)$ con cond. contorno

$u(0) = \sigma$ $u(h) = 0$

simil Couette
 MA $p_x \neq 0$

Calcoliamo Q vera ed esprimiamo $p_x = p_x(Q, \sigma)$

Imponiamo $\int_{x_1}^{x_2} p_x dx = 0$ e di qui troviamo Q in funzione di σ e della geometria.

In esodo forze: $F_x = \int T dx \sim \sigma \left(\frac{L}{h}\right)$
 $F_y = \int p dx \sim \sigma \left(\frac{L}{h}\right)^2$

$F_x = \frac{h}{L} F_y$

esunti e considerazioni

↓
 e $h \rightarrow 0$? impossibile
 (visione microscopica)

CASO CILINDRO

Hp: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ $p = \text{cost}$. Studio in coordinate cilindriche e con flusso potenziale

$u = \psi_y$ $v = -\psi_x$

$d\psi = u dy = -v dx$

PROCEDIMENTO:

Scritto eq. di Stokes sugli assi e le derivo risp. a y e x (risp. sugli assi x e y);
 poi le sottragg: $\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0$

Esprimo ∇^2 in coordinate cilindriche

Dallo studio in $(x, y) \rightarrow z \rightarrow \infty \quad u \rightarrow u_\infty \quad u = \varphi y$
 $u_\infty = \varphi y$

Considero $\varphi = F(z) G(\theta)$
 con $G(\theta)$ già come $\sin(\theta)$. Sostituendo
 in $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$ $F(z)$ avrà la forma:

MA $y = z \sin \theta$
 $\varphi = u_\infty z \sin \theta$

$F(z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz(\log z - \frac{1}{2})$
 da cui $B=C=D=0$

1 sola costante
 1 cond. continuo \rightarrow Problema di Stokes
 Non ci sono soluzioni analitiche ma solo sperimentali

\times k converge tutti all'infinito più veloce di z^2

CASO SFERA

Stesse hp, sempre $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$

In questo caso, coordinate sferiche:

$\varphi = \varphi(r, \psi, \theta)$ con le condizioni ek
 $u, v, w = 0$ sulla sup.

$r \rightarrow \infty \quad \varphi = \frac{1}{2} u_\infty r^2 \sin^2 \theta$

Con lo stesso procedimento $\varphi = F(z) G(\theta)$

$F(z) = \frac{A}{z} + Bz + Cz^2 + Dz^4$ da cui $D=0$

\hookrightarrow Abbastanza costanti da soddisfare le cond. continue

FORMULE

Forze agenti: Sfera $F = 6\pi \mu u_\infty R$

Cilindro $\frac{F}{\mu u_\infty R} = \frac{4\pi}{\log\left(\frac{3,703}{Re}\right)}$

INFLUENZA di Re

Cilindro SI



pn $z \rightarrow \infty$
 $u \rightarrow u_\infty$, ma $u = u_\infty - E$

$E \sim \frac{\rho}{z}$

$Re = \frac{v_2 L_2}{\nu} = \frac{E z}{\nu} = \frac{\rho}{\nu}$ quasi costante pn $z \rightarrow \infty$

Sfera NO

Più che, utilizzando il cilindro,

$E \sim \frac{\rho}{z^2} \quad Re = \frac{\rho}{\nu z}$

pn $z \rightarrow \infty \quad Re \rightarrow 0$ e non influenza i calcoli

CASO $Re \gg 1$

• Eq. di Eulero $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} + \nabla p = 0$

↳ HA limiti su condizioni contorno

Studio $\underline{\omega} = \nabla \wedge \underline{v} \rightarrow$ (Calcolo $\underline{v} \wedge \underline{\omega}$, sostituisco in N.-S. spacio il rotore) $\rightarrow \underline{\omega} = 0$ soluzione

Teor. di Kelvin: $\frac{D}{Dt} \oint \underline{v} \cdot d\underline{x} = 0 \Rightarrow$ Analisi delle zone a vorticità nulla: TUTTE? NO. (Scio)

↳ Concetto di aerodinamico

Studio del flusso potenziale: (dall'eq. abbiamo $\nabla^2 \varphi = 0$)

\rightarrow in $(x,y) \Rightarrow \varphi(x,y) = F(x)G(y) = e^{ax} e^{by}$

$\frac{F_{xx}}{F} = -\frac{G_{yy}}{G} = C$ (dalla sostituzione in $\nabla^2 \varphi$)

in (z,θ)

$\nabla^2 = \left[\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right]$ con $\varphi(z,\theta) = F(z)G(\theta)$

$G(\theta) = e^{b\theta}$

$F(z) = z^a \rightarrow$ questo attraverso la sost. $t = \log z \quad \frac{1}{dt} = z \frac{d}{dz}$

↳ Soluzione generale: $\varphi(z,\theta) = (Az^u + Bz^{-u})(Ce^{i\theta} + De^{-i\theta})$

$a, b \in \mathbb{N}$

CASI: $u=0 \rightarrow C=0 \rightarrow F(z) = C + D \log z$ (ricorda la sost. "t")
 $a=0 \Rightarrow \pm \sqrt{C}$
 $G(\theta) = A + B\theta$

$u=1$

$\& B=D=0 \quad \varphi = \cos \theta$
 $\& B=C=0 \quad -u=0$

Sorgente e pozzo

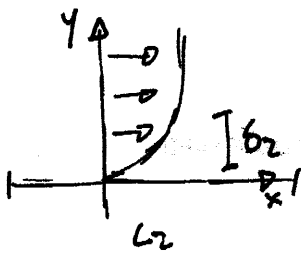
$\varphi(z,\theta) = \left(Az + \frac{B}{z} \right) (C \cos \theta + D \sin \theta)$

$A=D=0 \quad \varphi = \frac{B \cos \theta}{z}$

$B=D=0 \quad \varphi = Az \cos \theta$

} Somma dei casi \rightarrow calcolo delle velocità: $u_2 = \varphi_2$
 con $A=B=1 \quad u_2(z=1) = 0$ CASO CILINDRO

• Studio stato limite: conetti invidi



$$\epsilon = \frac{\delta z}{L_2}$$

Le scale di studio diverse

proiettate sugli assi

Scrittura equazioni adimensionali:

cambio variabili: $y^d = y^2 \delta z$

$$y^2 = \frac{y^d}{\delta z} \frac{L_2}{L_2} = \frac{y}{\epsilon}$$

Dall'eq. di continuita': $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

IMPRES. (STRANO)

$$L_2 v = \epsilon V$$

Riscrittura equazioni e semplificazioni:

$$\frac{1}{Re \epsilon^2} = 1 \quad (\text{altrimenti ritorno a Eulro, poich\`e } \frac{\partial u}{\partial y^2} \gg 1)$$

U aumenta molto in δz molto piccolo

Riscrittura eq. dello stato limite (su y esce $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$)

Dalle cond. contorno $u=v=0 \quad y=0$

$y \rightarrow \infty \quad u=U_\infty \quad p=p_\infty \rightarrow$ Bernoulli, poich\`e $p_y = 0$, si puo' sostituire in eq.

PROBLEMA: diversi profili di velocita'; x normalizzazione $\eta = \frac{y}{h(x)}$

Utilizzo $\psi = h(x) f(\eta)$

e $u = \psi_y$ poi calcolo $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y^2}$ e sostituisco in eq. stato limite (senza p_x)
 $v = -\psi_x$

CALCOLO SFORZI DI TAGLIO

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

N.B.
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Separo variabili e le impongo costanti:

$$-h'h = \frac{f'''}{f f''} = C$$

con $C = -\frac{1}{2}$

ovvio a $h = \sqrt{x}$

Impongo cond. contorno, ma non risolvo

$$u=0 \quad f'=0 \rightarrow y=0$$

$$v=0 \quad y \rightarrow \infty$$

$$u \rightarrow U_\infty \quad y \rightarrow \infty$$

Adimensionando, esplicito $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{Re}} = \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty L_2}}$
ricordo $y = \eta h(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial \eta} = f''$
e $h(x) = \sqrt{x}$

Equazione di Clausius

e $\mu = \rho \nu$
e $x^0 = \frac{x^d}{L_2}$

calcolato in 0, puoi sfioro sulla parete $f''(0) = 0,332 \dots$

Osservazioni:

- In Clausius non compare length. di riferimento,
può lastra piana indefinita

- Per il calcolo del gradino al 99% $\rightarrow \eta = 5 = \frac{\gamma}{\epsilon \sqrt{x}} = \frac{\gamma}{\sqrt{x}} = \frac{\gamma}{\sqrt{x}} \sqrt{Re} = \frac{\gamma}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{U_2 L_2}{\nu}}$

\rightarrow Ricordando che $x^2 = x^d / L_2 \rightarrow \gamma = \delta_{99} = 5 \sqrt{\frac{\nu x^d}{L_2}}$

- Caso fluido non viscoso che sale di tutto il gradino;
per eguagliare le portate $\gamma = \delta^* = 1,7 \dots \sqrt{\frac{\nu x^d}{L_2}}$

(vedi quadro
x approfondire)

TURBOLENZA - MAPPA CONCETTUALE

Esperimento di Reynolds

↓

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} + \nabla p = \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{v} \quad \text{capace di descrivere turbolenza}$$

↓

Utilizzo statistics: $\underline{v} = \bar{\underline{v}} + \underline{v}'$ e $\bar{\underline{v}}' = 0$

↓

Scrittura bilancio in forma causale con $p = \text{cost}$

↳ Applico media ai bilanci

↳ Sforzi di Reynolds: $\nabla \cdot (\bar{\underline{v}'\underline{v}'}) = \nabla \cdot \tau_R$

↓

Bilancio lungo x con hp: flusso unito max $u_x = 0$
 $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad v = 0$

↳ Sforzi totali

$\tau_T = \tau_w + \tau_R$

↳ Wall Layer - Defect Layer: studio separato con zona di matching

↓

$$u = u(y, h, v, u^*) \quad u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Wall L. $u \neq u(h)$ $u = u_c - f\left(\frac{y}{h}\right) u^*$

Defect L. $u \neq u(v)$ $u = u^* f\left(\frac{y u^*}{v}\right)$

Zona di matching

↳ Uso funzioni logaritmiche $a + b \log(\dots)$

↳ Attraverso calcolo $\bar{u} = \frac{1}{h} \int \dots$

ovvero a:
 $\bar{u} = u_c - u^* C$

Dato: $\eta = \frac{y}{h}$

↳ Dalle eq. logaritmiche esodo

$\frac{u_c}{u^*} = \dots$ (con $\kappa \approx 0.4$)

$\frac{\bar{u}}{u^*} = \dots$

↳ Introducendo C_f e Re , legge di attrito di Prandtl

Diagramma di Moody

Osservazioni:

- la Moody linee costanti per Re molto alto

↳ profilo $\frac{u}{u_m} = f(y_+)$ $y_+ = \frac{y u_m}{\nu}$ 0,5,30

Applicazioni:

- con bilancio deflusso $\bar{\tau}_{wall} = \frac{\Delta P S}{PL}$ e $D_H = 4 \frac{S}{P}$

- deflusso $f = 4cf$ e calcolo con ↗

- perdite concentrate

- forza di resistenza

APPROFONDIMENTO SUL BILANCIO

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v} \underline{v}) + \nabla p = \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{v}$$

↳ Introducendo medie e facendo media di tutto

$$\frac{\partial \bar{\underline{v}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\underline{v}} \underline{v}) + \nabla \cdot (\underline{v}' \underline{v}') + \nabla \bar{p} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{\underline{v}}$$

Eq. di continuita':

$$\nabla \cdot \bar{\underline{v}} = 0$$

Proiettiamo sugli assi, con hp: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (vento max)

$$\bar{u}_x + \bar{v}_y = 0 \Rightarrow \bar{v}_y = 0 \Rightarrow \bar{v} = 0 \quad \forall y$$

↳ basta che e' 0 per una y

$$\nabla \cdot (\underline{v}' \underline{v}') = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} \overline{u'u} & \overline{v'u} \\ \overline{u'v} & \overline{v'v} \end{pmatrix}$$

$$x) \underbrace{(\overline{u'u})}_u + \underbrace{(\overline{u'v})}_v + \underbrace{(\overline{v'u})}_u + \underbrace{(\overline{v'v})}_v + \bar{p}_x = \frac{1}{Re} (\bar{u}_{xx} + \bar{u}_{yy})$$

Dimensionalizzando

$$\rho (\overline{u'v'})_y + \bar{p}_x = \mu \bar{u}_{yy}$$

Integrando in y

$$\rho (\overline{u'v'}) + \bar{p}_x y = \mu \bar{u}_y + c$$

$$\rho \bar{p}_x y - c = -\rho (\overline{u'v'}) + \mu \bar{u}_y \rightarrow \tau_{wall}$$

τ_{TOTALI}

FLUSSO COMPRIMIBILE

$\rho \neq \text{cost} \quad \rho = \rho(p, T)$

Leggi conosciute:

- ① $de = Tds - pdv$
- ② $dh = Tds + vdp$
- ③ $e = c_v T$
- ④ $h = c_p T$
- ⑤ $p = \rho RT$ (gas perfetto)
- ⑥ $k = c_p/c_v$

Ipotesi di studio:

flusso isentropico

$ds = 0$

②

$dh = \frac{dp}{\rho} = c_p dT$

⑤

$\frac{dp}{\rho} RT = c_p dT \rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} \frac{c_p}{R}$

$\log p = \log T \cdot \frac{c_p}{R} + C$

$p = T^{c_p/R} \cdot c$

⑤

$p = \left(\frac{p}{p_R}\right)^{c_p/R} \cdot c$

nel caso di flusso isentropico

$\frac{Ds}{Dt} = 0$

$p \propto \rho^{c_p/R - 1}$

$p \propto \rho^k$

$p = c' \left(\frac{\rho}{\rho_R}\right)^{c_p/R}$

$\rho^{c_p/R} \propto p^{c_p/R - 1}$

Equazioni che reggono il fluido:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \\ \frac{Ds}{Dt} = 0 \end{cases}$$

N.B. Trascuriamo g perché quasi sempre sono gas.

scivolo solo lungo $x \quad \mathbf{v} = (u, v)$

moto solo lungo $x!$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{v \frac{\partial v}{\partial x}} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho} = 0$

Per le ipotesi di quasi equilibrio locale:

$\rho = \rho_0 + \delta \rho \quad p = p_0 + \delta p$

$v = \delta v \rightarrow xk$, nell'analisi termodinamica, fluido quasi fermo

Analizziamo termini:

$\rho u \rightarrow (\rho_0 + \delta \rho) \delta v \rightarrow \rho_0 \delta v$

$u \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \delta v \frac{\partial \delta v}{\partial x} \approx 0$

$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{\rho_0 + \delta \rho} \frac{\partial (\rho_0 + \delta p)}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial x}$

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 \delta v) = 0 \\ \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Poiché: $p = p(p, s)$

$$\delta p = \left. \frac{\partial p}{\partial p} \right|_{p=p_0} \delta p + \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_{p=p_0} \delta s \quad \delta s = 0$$

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial p}{\partial p} \right|_{p=p_0} \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{Deriviamo risp. tempo} \\ \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{Deriviamo risp. spazio} \end{cases}$$

Isoliamo ed eliminiamo $\frac{\partial^2 \delta v}{\partial x \partial t}$:

ipotizzando:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial p} \right|_{p=p_0} = \frac{1}{A^2}$$

$$-\frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial p}{\partial p} \right|_{p=p_0} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{1}{A^2} \delta p_{tt} = \delta p_{xx}$$

equazioni delle onde (risolvibili analiticamente)

$A =$ velocità dell'onda

Es. soluzione: $\delta p = F(x + At)$
 $\delta p = G(x - At)$

semplice proprio
 legge del moto
 rettil. uniforme

Calcolo A per un gas perfetto:

$$A = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{p=p_0}} = \sqrt{\frac{\partial c \rho^\kappa}{\partial \rho}} = \sqrt{\kappa c \rho^{\kappa-1}} = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa R T}$$

$p = c \rho^\kappa$ $\frac{p}{\rho} = c \frac{\rho^\kappa}{\rho} = c \rho^{\kappa-1}$ $p = \rho R T$
 $\frac{p}{\rho} = R T$

FLUSSO COMPRESSIBILE - UGELLO

H_p: • flusso quasi monodimensionale

↳ linee di flusso cambiano dolcemente

↳ con Oxy su linea di flusso, \forall quasi tutta lungo x

$$\mathbf{v} = (u, v, w) \quad \left| \frac{v}{u} \right| \ll 1 \quad \left| \frac{w}{u} \right| \ll 1$$

• Diametro del tubo piccolo rispetto a raggio curvatura

FORMULA 1

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \rightarrow \rho u A = \text{cost} \rightarrow u A dp + \rho A du + \rho u dA = 0$$

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad \text{opp.} \quad \frac{1}{\rho} p_x + \frac{1}{u} u_x + \frac{1}{A} A_x = 0$$

FORMULA 2

h_p: $\mathbf{v} \gg 1 \quad Re \gg 1 \quad ds = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0$

Eulero: $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$

$\& \left| \frac{v}{u} \right| \ll 1 \quad \left| \frac{w}{u} \right| \ll 1$

\mathbf{v} solo lungo x

FORMULA 3

Stokes: $dh = T ds + v dp$

$ds = 0 \rightarrow dh = \frac{dp}{\rho}$

$u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow \rho u du = -dp$

$-\frac{\rho u du}{\rho} = dh = -u du \Rightarrow dh = d\left(-\frac{1}{2} u^2\right)$

$h + \frac{1}{2} u^2 = \text{cost.}$

osservazione

Entalpia di ristagno: cond. 0, quando fluido fermo:

$$h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = h_0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = h_0$$

FORMULA 4

$$h + \frac{1}{2} u^2 = h_0 \quad \xrightarrow{h = c_p T} \quad c_p T + \frac{1}{2} u^2 = c_p T_0 \rightarrow 1 + \frac{u^2}{2c_p T} = \frac{T_0}{T} \quad \xrightarrow{T = \frac{a^2}{\kappa R}}$$

$$\rightarrow 1 + \frac{\kappa R u^2}{2c_p a^2} = \frac{T_0}{T} \Rightarrow 1 + \kappa^2 \frac{\kappa - 1}{2} = \frac{T_0}{T}$$

$$\frac{u^2}{a^2} \frac{\frac{c_p}{c_v} (c_p - c_v)}{2c_p} = \kappa^2 \frac{1}{2} \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right)$$

FORMULA 5-6-7

Formula 2: $u du = -\frac{dp}{\rho}$ $\xrightarrow{a^2 = \frac{dp}{\rho}}$ $u du = -A^2 \frac{dp}{\rho} \Rightarrow \frac{dp}{\rho} = -\frac{u du}{A^2}$

Dividendo per u^2 : $-\frac{dp}{\rho u^2} = \frac{du}{u} = -\frac{dp}{\rho} \frac{1}{M^2}$ **FORMULA 6**

Form. 1 $\frac{dA}{A} + \frac{du}{u} - \frac{u du}{A^2} = 0$ **FORMULA 5**

Osservazione

Riscriviamo Form. 5 mettendo in evidenza $\frac{du}{u}$:

$$\frac{dA}{A} + \frac{du}{u} \left(1 - \frac{u^2}{A^2}\right) = 0$$

$$\frac{dA}{A} + \frac{du}{u} (1 - M^2) = 0$$

$$\frac{dA}{A} + \frac{dp}{\rho} - \frac{dp}{\rho} \frac{1}{M^2} = 0$$

$$\frac{dA}{A} + \frac{dp}{\rho} \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) = 0$$

FORMULA 7

$$\frac{dA}{A} + \frac{dp}{\rho} \left(\frac{M^2 - 1}{M^2}\right) = 0$$

INOLTRE, dividiamo Form. 5 e 7 per dx :

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{u} \frac{du}{dx} (1 - M^2) = 0$$
 FORMULA 5

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \left(\frac{1 - M^2}{M^2}\right) = 0$$
 FORMULA 7

ANALISI UGELLO

	A_x	u_x	p_x	ρ_x
$M > 1$	> 0	> 0	< 0	< 0
	< 0	< 0	> 0	> 0
$M < 1$	> 0	< 0	< 0	> 0
	< 0	> 0	> 0	< 0

per u_x : FORMULA 5

per ρ_x : FORMULA 7

per p_x : dalla formula 5

Sostituiamo du della formula 2

• Motivazioni

ugello convergente - divergente

• Osservazioni su:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = (1 - M^2) \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

Condizioni necessarie
x flusso esente, ecc...