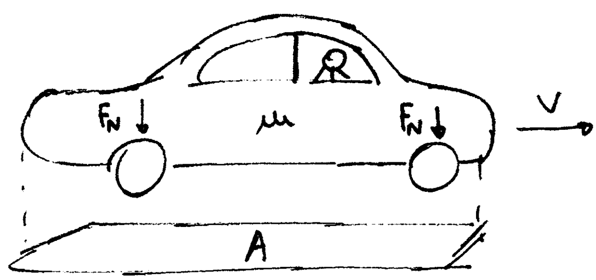
Es. 12.23



$A = 6\ m^2$

$m = 700\ Kg$

Condizione di non slittamento:

$F_N \geq 700\ N$ (per ogni ruota)

$V_{MAX} = 140\ Km/h$

$C_{L\,MAX}$ ammissibile per auto

Affinché la macchina non sliti,
la forza totale normale alla strada è $F_N = 700 \cdot 4 = 2{,}8\ KN$

La forza totale che la macchina esercita è: $F_M = \underbrace{mg}_{\text{forza peso}} - \underbrace{F_L}_{\text{forza di sollevamento}}$

In genere quindi deve essere:

$F_M \geq F_N$

$6867 - F_L \geq 2800 \Rightarrow F_L \leq 4067\ N$. Il max C_L ammissibile è calcolabile nelle condizioni limite con $V = V_{MAX}$.

$F_L = C_L \dfrac{A}{2} \rho V^2$ $\underbrace{\text{con } \rho = 1{,}1\ Kg/m^3}$

$\longrightarrow C_L = 0{,}815$ che è funzione dell'area di proiezione

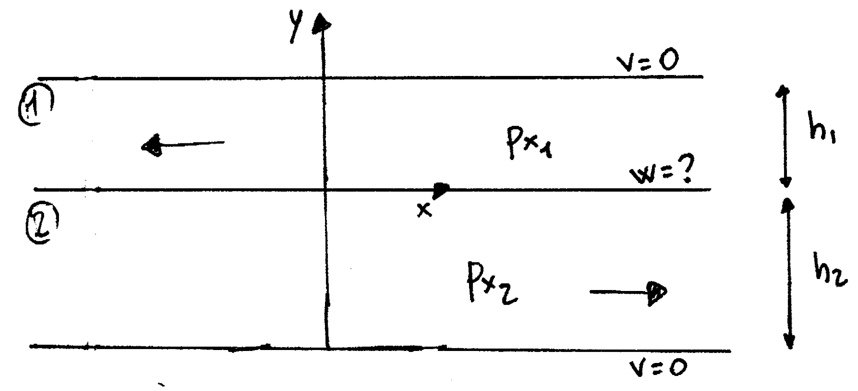
↳ + grande è l'area di proiezione, + C_L può essere piccolo per mantenere la stessa F_L

In condizioni ventose, la max velocità ammissibile cambia.

Se non ci fosse vento, e la macchina è a 140 Km/h, è come se fosse investito da un flusso d'aria da dx verso sx ⟶ nel verso in figura a 140 Km/h. Ora le due condizioni ventose a 80 e 30 Km/h vanno analizzate a seconda della direzione.

- Se la direzione è verso sx, si sommano costruttivamente alla velocità già presente, costringendo a ridurre la velocità per mantenere la velocità del flusso d'aria attorno alla macchina sotto i 140 Km/h (quindi V_{MAX} diventa rispett. 60 e 110 Km/h)
- Se la direzione è verso dx, il vento si oppone al flusso di 140 verso sx, e quindi la velocità globale è ridotta. Possiamo quindi aumentare velocità macchina rimanendo con un flusso d'aria attorno a esso $\leq 140\ Km/h$ (risp. $V_{MAX} = 220, 170$)

Es. 6.31 p. 189



$h_1 = 0{,}3\,m$
$h_2 = 0{,}5\,m$
$p_{x_1} = 300\ Pa/m$
$p_{x_2} = -300\ Pa/m$
$w = ?$

Supponiamo che la v della lastra centrale sia positiva (se w sarà < 0, allora sarà diretta nell'altro senso).

I due flussi tra due lastre piane possono essere descritti dall'equazione:

$u(y) = \frac{p_x}{\mu}\frac{y^2}{2} + Ay + B$ che va particolarizzata nei due casi.

① $u(h_1) = 0 \rightarrow \frac{p_{x_1}}{\mu}\frac{h_1^2}{2} + Ah_1 + B = 0$

$u(0) = w \rightarrow B = w \rightarrow A = -\frac{\left(w + \frac{p_{x_1}}{\mu}\frac{h_1^2}{2}\right)}{h_1}$

$$u_1(y) = \frac{p_{x_1}}{2\mu}\left(y^2 - yh_1\right) - \frac{w}{h_1}y + w$$

② $u(0) = w \rightarrow B = w$

$u(-h_2) = 0 \rightarrow A = \frac{w + \frac{p_{x_2}}{\mu}\frac{h_2^2}{2}}{h_2} \rightarrow u_2(y) = \frac{p_{x_2}}{2\mu}\left(y^2 + yh_2\right) + \frac{w}{h_2}y + w$

Affinché la lastra centrale si muova con velocità costante, x l'equilibrio, dobbiamo avere che gli sforzi di taglio imposti sulla lastra dai due fluidi devono annullarsi.

$$\tau_1 = \mu \frac{du_1}{dy}\Big|_{y=0} = \mu\left[\frac{p_{x_1}}{\mu}y - \frac{p_{x_1}}{2\mu}h_1 - \frac{w}{h_1}\right]_{y=0} = -\left(\frac{p_{x_1}h_1}{2} + \frac{w\mu}{h_1}\right)$$

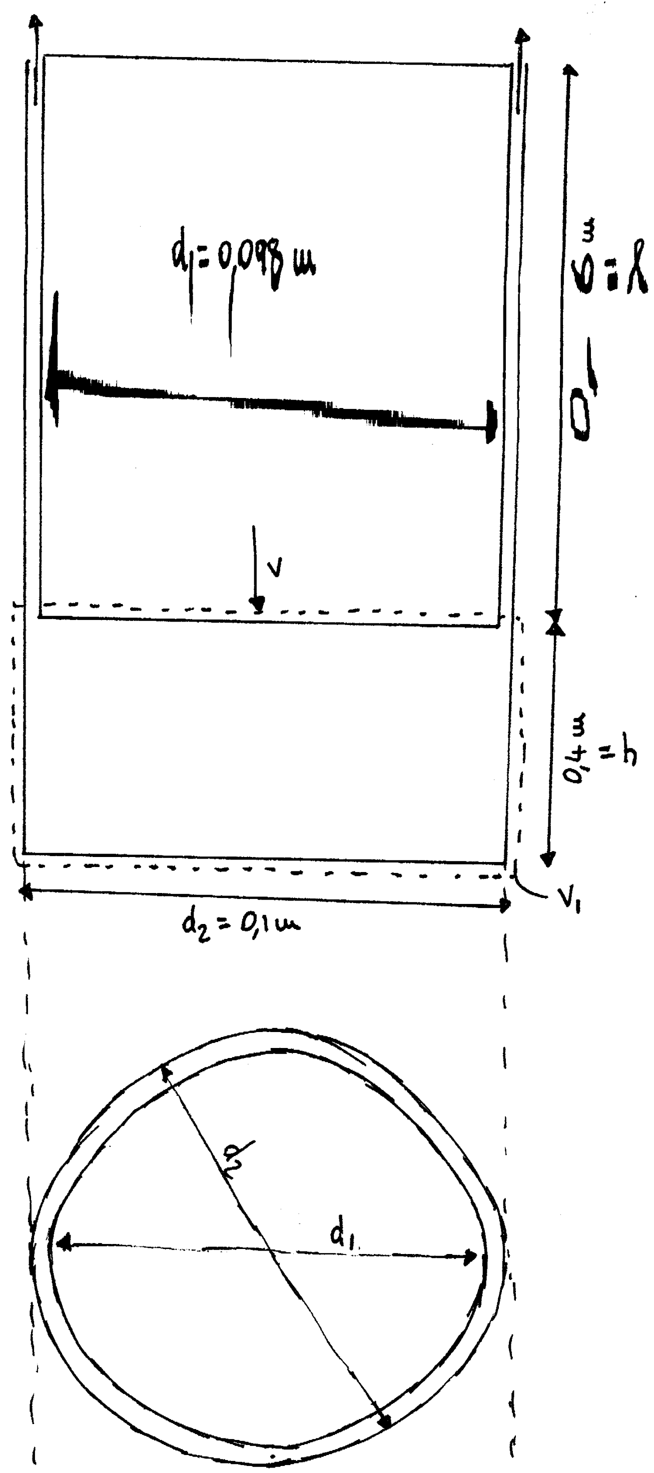
$$\tau_2 = \mu\frac{du_2}{dy}\Big|_{y=0} = \mu\left(\frac{p_{x_2}h_2}{2\mu} + \frac{w}{h_2}\right) = \frac{p_{x_2}h_2}{2} + \frac{w\mu}{h_2}$$

$\tau_1 + \tau_2 = 0$

$$\frac{p_{x_1}h_1}{2} + \frac{w\mu}{h_1} = \frac{p_{x_2}h_2}{2} + \frac{w\mu}{h_2}$$

$$w = \frac{p_{x_1}h_1 - p_{x_2}h_2}{2\mu\left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1}\right)}$$

Es. 6.22 pag. 187



$\mu = 3 \cdot 10^{-3}\ Kg/ms \qquad V = 1\ m/s$

- Profilo di velocità nello spazio pistone-cilindro
- Punti in cui si annulla v. del fluido
- Sforzo di taglio e gradiente di velocità sulle pareti del cilindro
- Forza che spinge il pistone

Calcoliamo la portata di fluido che fuoriesce nell'intercapedine tra pistone e cilindro, attraverso un bilancio di massa su V_1:

$$\frac{dM}{dt} = -\oint_{\text{intercapedine}} \underline{J}_M \cdot \underline{n}\, dS = -Q_M \leftarrow \text{portata massica}$$

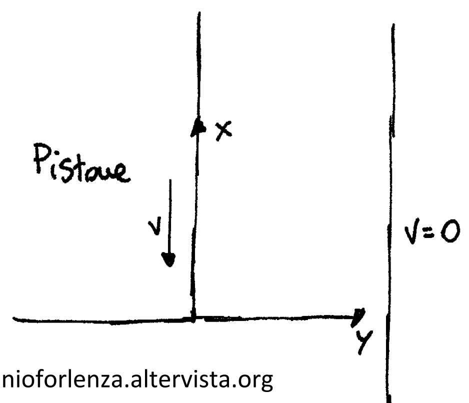
$$M = \pi r_2^2 h \rho \rightarrow \frac{dM}{dt} = \pi r_2^2 \rho \frac{dh}{dt} = -\pi r_2^2 \rho V$$

$$-\pi r_2^2 \rho V = -Q_M \rightarrow Q_M = \pi r_2^2 \rho V$$

$$\underset{\text{portata volumetrica}}{Q_V} = \frac{Q_M}{\rho} = \pi r_2^2 V = 7{,}85 \cdot 10^{-3}\ \frac{m^3}{s}$$

→ questa è la portata di fluido che fuoriesce attraverso intercapedine

Analizziamo l'intercapedine:



Il flusso di fluido che si realizza tra pistone e cilindro è un flusso tra tubi coassiali, regolato dalla legge:

$$v = C_1 \log r + \frac{P_x}{\mu}\frac{r^2}{4} + C_2$$

con $v(r_2) = 0 \quad v(r_1) = -V \qquad \bar{v} = \dfrac{Q_V}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$

Abbiamo infatti 3 incognite da determinare:
C_1, C_2 e p_x

Tuttavia, poiché l'intercapedine è molto sottile, il flusso può essere visto bidimensionalmente tra due lastre piane e parallele.
Con il sist. di rif. in figura possiamo scrivere:

$$u(y) = \frac{p_x}{\mu}\frac{y^2}{2} + Ay + B$$

[flusso generico tra due lastre: Poiseulle e Couette sono particolarizzazioni di questo]

con:
$$\begin{cases} \text{Ⓐ } u(0) = -v \\ \text{Ⓑ } u(d) = 0 \\ \text{Ⓒ } \bar{u} = \dfrac{Q_v}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} = \dfrac{1}{d}\displaystyle\int_0^d u(y)\,dy \end{cases}$$

chiamiamo d la distanza $r_2 - r_1 = 10^{-3}$ m

sappiamo che $\bar{u}$ tra pistone e cilindro è la portata volumetrica diviso l'area che attraversa → deve essere uguale alla $\bar{u}$ in questo caso

Ⓐ $u(0) = B = -v$

Ⓑ $u(d) = \dfrac{p_x}{\mu}\dfrac{d^2}{2} + Ad - v = 0$

$$\frac{1}{d}\left[\frac{p_x}{6\mu}d^3 + A\frac{d^2}{2} + Bd\right] = \frac{p_x}{6\mu}d^2 + \frac{Ad}{2} + B$$

Ⓒ $\dfrac{Q_v}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} = \dfrac{p_x}{6\mu}d^2 + \dfrac{Ad}{2} - v$

Moltiplico Ⓑ $\cdot \frac{1}{2}$ e effettuo Ⓑ−Ⓒ:

$$\frac{1}{12}\frac{p_x}{\mu}d^2 + \frac{v}{2} = -\frac{Q_v}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$$

$$p_x = -\left[\frac{Q_v}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{v}{2}\right]\frac{12\mu}{d^2}$$

$$-6\left[\frac{Q_v}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{v}{2}\right] + Ad - v = 0$$

$$A = \frac{6}{d}\left[\frac{Q_v}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{2}{3}v\right]$$

Numericamente: $B = -1$ m/s
$p_x = -927000$ Pa/m
$A = 155500$ 1/s

Il profilo di velocità è:

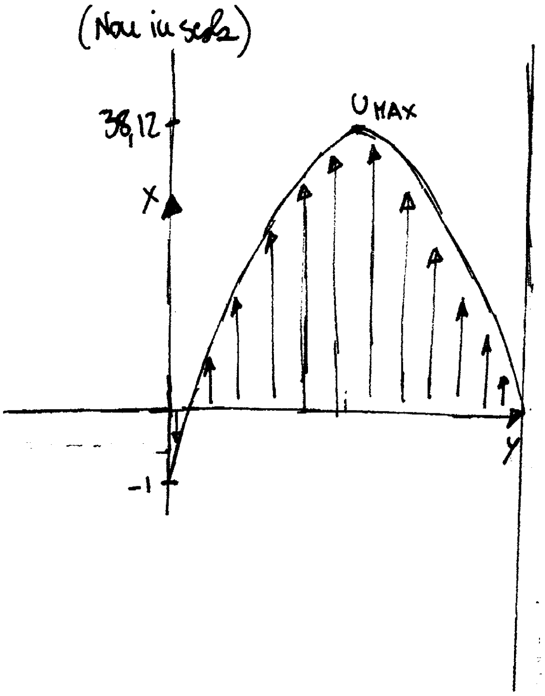
$$u(y) = -154{,}5 \cdot 10^6 y^2 + 155500\,y - 1$$

u_{MAX} è a $y = \underbrace{-\dfrac{b}{2a}}_{\text{vertice parabola}} = 5{,}03 \cdot 10^{-4}$ m (cioè proprio a metà della distanza tra pistone e cilindro).

e vale: 38,12 m/s

$\bar{U}$ invece è uguale x costruzione del sistema, proprio a $\dfrac{Q_V}{\pi(r_2^2-r_1^2)} = 25,2\ m/s$

Il profilo delle velocità è fatto in questo modo.



Per calcolare punti dell'intercapedine in cui si annulla velocità del fluido, poniamo $u(y) = 0$

$$-154,5\cdot 10^6\, y^2 + 155,5\cdot 10^3\, y - 1 = 0$$

Risolvendo graficamente (o con le formule)

$y_1 = d$ (com'era ovvio)

$y_2 = 6,5\cdot 10^{-6}\ m$ (cioè molto vicino alla parete del pistone)

lo si può notare anche dal profilo di velocità a lato

Il gradiente di velocità sulle pareti del cilindro è pari a:

$$\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=d} = \left[-77,25\cdot 10^6\, y + 155,5\cdot 10^3\right]_{y=d} = 78250\ \frac{1}{s}$$

Lo sforzo di taglio che agisce sulle pareti del cilindro è:

$$\tau_c = \mu \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=d} = 234,8\ Pa$$

Per calcolare la forza da imprimere al pistone, dobbiamo calcolare la forza impressa dal fluido sul pistone in queste condizioni, che, per il 3° principio della dinamica, è uguale e contraria.

$$\underline{F} = \int_{S.\,pistone} \underline{\underline{J_Q}}\cdot \underline{n}\, dS = \int_{Base} \underline{\underline{J_Q}}\cdot \underline{n}\, dS + \int_{A\ laterale} \underline{\underline{J_Q}}\cdot \underline{n}\, dS$$

Analizziamo cosa accade sulla S laterale

La base del pistone è a contatto con il fluido del volume V_1, che ha v trascurabile rispetto all'intercapedine ...

Di conseguenza abbiamo $\underline{\underline{J_Q}} = p\underline{\underline{I}} + \cancel{\rho \underline{v}\,\underline{v}}$

sì

$p\underline{\underline{I}}$

Qual è la pressione che dobbiamo scegliere? Sappiamo, per il principio di Pascal, che il fluido in V_1 esercita la stessa pressione su tutte le superfici di V_1, quindi anche su quella collegata all'intercapedine $\Rightarrow p = p_{intercapedine}$

Di $p_{intercapedine}$, abbiamo solo p_x: necessario integrare in x, con le condizioni al contorno che $p(0,6) = p_0 = 10^5$ Pa, cioè all'uscita del pistone è uguale alla pressione atmosferica

$$p = \int p_x \, dx = -927000x + A$$

$$p(0,6) = -556200 + A = 10^5 \Rightarrow A = 656200$$

$$p_{int} = -927000x + 656200$$

Quella necessaria a noi è proprio p_{int} a $x=0$ (perché l'origine degli assi è all'inizio della intercapedine)

$$p = 656200 \text{ Pa}$$

$$S_B = \pi \frac{0{,}098^2}{4}$$

Quindi $$\int_{Base} p\,\underline{u}_B\,dS = p\,\underline{u}_B S_B = 4950\,\underline{u}_B$$

Abbiamo $\underline{\underline{J_Q}} = p\underline{\underline{I}} + \rho \underline{v}\,\underline{v}$

La pressione che agisce lateralmente sul pistone non è altro che lo sforzo di taglio agente sulla superficie del pistone:

moltiplicato poi scalarmente per $\underline{u}$ (nell'integrale) si annulla perché $\underline{v} \perp \underline{u}$

$$\tau_p = \mu \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = 466{,}5 \text{ Pa}$$

Quindi abbiamo:

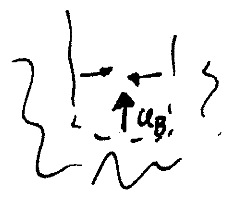
$$\int_{A.lat.} \underline{\underline{J_Q}} \cdot \underline{u}\,dS = \int_{A.lat} \tau_p \underline{u}_B\,dS = \tau_p \underline{u}_B S_l = 86{,}2\,\underline{u}_B$$

$\underline{u}_B$ perché lo sforzo è tangenziale alla sup. laterale

$S_l = 2\pi r_1 l$

$l = 0{,}6$

Osservazione: $\underline{u}_B$ è diretto verso l'alto perché la superficie che stiamo analizzando è quella che include il fluido, non il pistone.



Quindi abbiamo:

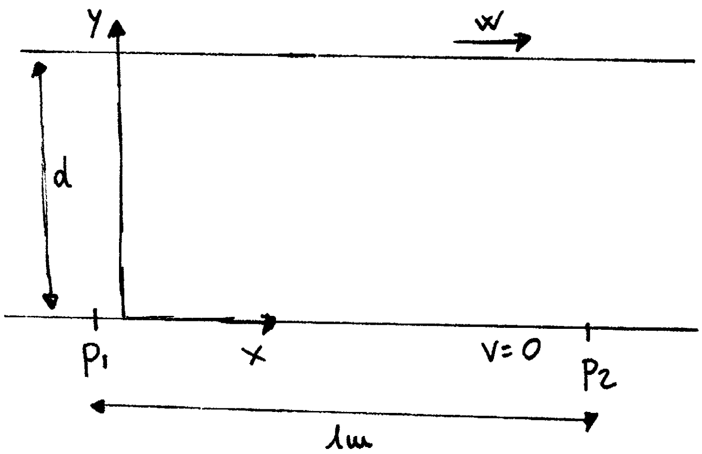
Newton

$$\underline{F} = (4950 + 86{,}2)\,\underline{u}_B = 5036{,}2\,\underline{u}_B$$ diretta verso l'alto

La forza da imprimere sul pistone sarà dunque:

$$\underline{F}_P = -5036{,}2\,\underline{u}_B$$ diretta verso il basso

Es. 6.21 - p.186



$w = 2\ m/s$ $\quad \mu = 2\cdot 10^{-2}\ \frac{kg}{ms}$

$d = 0{,}01\ m$

$\overline{p_1 p_2} = 1m$

$p_1 = 100000\ Pa$

$p_2 = ?$

Calcolare in 3 condizioni:

A) la corrente netta è nulla

B) la corrente netta vale $0{,}10\ m^2/s$

C) la corrente netta vale $-0{,}10\ m^2/s$

Analizziamo il flusso che si genera tra le due lastre → E' dovuto sia a un gradiente di pressione che al movimento della lastra superiore

↓

Può essere visto come una sovrapposizione dei flussi di Poiseulle e Couette

Il profilo di velocità dunque è:

$$u(y) = \underbrace{-p_x \frac{d^2}{2\mu}\left[\frac{y}{d} - \left(\frac{y}{d}\right)^2\right]}_{\text{Poiseulle}} + \underbrace{w\frac{y}{d}}_{\text{Couette}}$$

La corrente netta è la portata di questo flusso:

$$Q = \int_0^d u(y)\,dy$$

Calcoliamo Q:

$$Q = \int_0^d u(y)\,dy = \int_0^d -p_x\frac{d^2}{2\mu}\left(\frac{y}{d} - \left(\frac{y}{d}\right)^2\right)dy + \int_0^d w\frac{y}{d}\,dy = Q_{Poiseulle} + Q_{Couette} = -p_x\frac{d^3}{12\mu} + \frac{wd}{2}$$

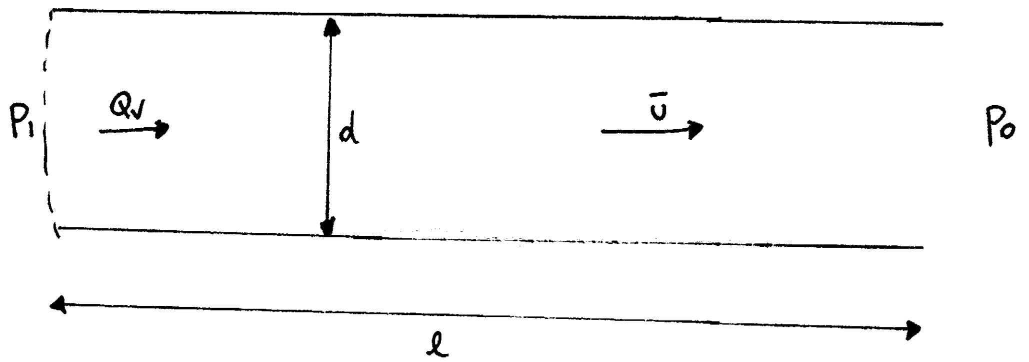
1) $Q = 0$ flusso nullo $\longrightarrow p_x = \frac{wd}{2}\cdot\frac{12\mu}{d^2\cdot d} = \frac{6w\mu}{d^2} = 2400\ Pa/m$ $\qquad p_2 = p_1 + p_x\,\overline{p_1p_2} = 102400\ Pa$

) $Q = 0{,}10\ m^2/s$ flusso verso destra $\longrightarrow p_x = \left(\frac{wd}{2} - 0{,}10\right)\frac{12\mu}{d^3} = -21600\ Pa/m$ $\qquad p_2 = p_1 + p_x\,\overline{p_1p_2} = 78400\ Pa$

) $Q = -0{,}10\ m^2/s$ flusso verso sinistra $\longrightarrow p_x = \left(\frac{wd}{2} + 0{,}10\right)\frac{12\mu}{d^3} = 26400\ Pa/m$ $\qquad p_2 = p_1 + p_x\,\overline{p_1p_2} = 126400\ Pa$

Tecnicamente $p_2 = p_1 + \int^{\overline{p_1p_2}} p_x\,dx = p_1 + p_x\,\overline{p_1p_2}$

Es. 6.12 p. 184



tubo cilindrico

$\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ Kg/ms

$d = 0{,}0025$ m

$l = 20$ m

$p_0 = 10^5$ Pa

$\bar{v} = 1$ m/s

$Q_V = ?$ $p_1 = ?$

Abbiamo un flusso cilindrico con velocità esclusivamente assiale. La legge generica per il flusso in tubi coassiali è:

$$v = C_1 \log r + \frac{p_x}{\mu}\frac{r^2}{4} + C_2$$

- poiché non vi è cilindro interno, a $r=0$ $\log r = \infty$, quindi deve scomparire: $C_1 = 0$
- Inoltre, il cilindro è fermo $v\left(\frac{d}{2}\right) = 0$ $\quad \frac{d}{2} = R$

$$v = -\frac{p_x}{4\mu}(R^2 - r^2)$$

sappiamo che $\bar{v} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R v(r)\, r\, dr = -\frac{p_x R^2}{8\mu} = 1$ m/s dai dati

$$p_x = -\frac{8\mu}{R^2} = -10240 \text{ Pa/m}$$

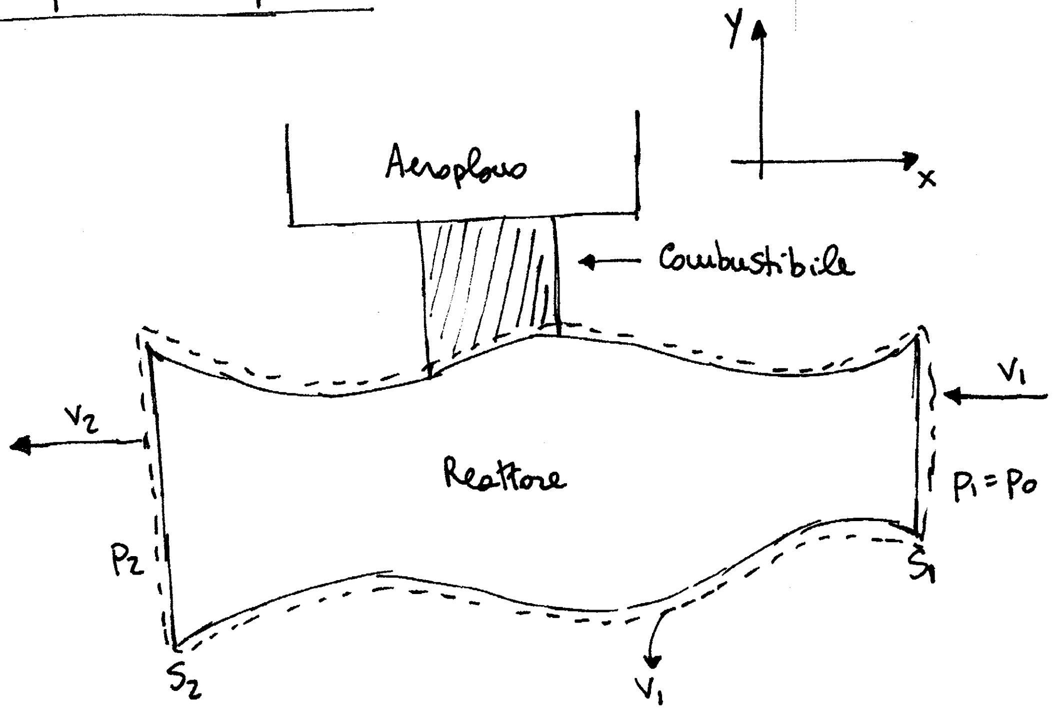
- $Q_V = ?$ Poiché la portata deve rimanere costante (perché la massa si conserva e il fluido è incomprimibile, quindi non può variare di volume)

avremo che Q_V è uguale dappertutto e $Q_V = \bar{v}\,\frac{\pi d^2}{4} = 4{,}9 \cdot 10^{-6}$ m³/s

- Conoscendo p_0 e p_x, calcoliamo p_1:

$$p_0 = p_1 + \int_0^l p_x\, dx = p_1 + (-10240)\cdot 20 \Longrightarrow p_1 = p_0 + 204800 = 304800 \text{ Pa}$$

Esempio 4.9 p. 105



$\rho_1 = 1{,}2\ Kg/m^3$
$p_1 = p_0 = 10^5\ Pa$
$v_1 = 280\ m/s$
$S_1 = 0{,}1\ m^2$
$p_2 = 1{,}1 \cdot 10^5\ Pa$
$S_2 = 0{,}3\ m^2$
$v_2 = 650\ m/s$

[Rapporto combustibile/aria: 1:20]

Calcolare la forza che il reattore esercita sull'aeroplano.

Per il calcolo della forza, è necessario effettuare un bilancio di quantità di moto sul V.C. V_1, solidale con il reattore (v_1 e v_2 sono già velocità relative al reattore). TUTTAVIA, poiché sarà necessario conoscere ρ_2, calcoliamo prima questa con un bilancio di massa.

$$\frac{dM}{dt} = -\oint \rho\, \underline{v} \cdot \underline{n}\, dS = -\int_{S_1} - \int_{S_2} - \cancel{\int_{S_{laterale}}} =$$

nullo xK non vi è flusso di massa

$$= -\int_{S_1} \rho_1 \underline{v_1} \cdot \underline{n_1}\, dS - \int_{S_2} \rho_2 \underline{v_2} \cdot \underline{n_2}\, dS = \rho_1 v_1 S_1 - \rho_2 v_2 S_2 = \frac{dM}{dt} = -\dot{m}_c$$

c'è il meno xK è una perdita

La variazione di massa coincide proprio con il combustibile che si consuma.

Sappiamo dal rapporto di combustione: $\frac{m_c}{m_a} = \frac{\dot{m}_c}{\dot{m}_a} = \frac{1}{20}$. Sappiamo che

$\dot{m}_c = -\rho_1 v_1 S_1 + \rho_2 v_2 S_2$ mentre $\dot{m}_a$ è la portata di aria entrante attraverso S_1, cioè $\rho_1 v_1 S_1$.

Sostituendo:

$$\frac{-\rho_1 v_1 S_1 + \rho_2 v_2 S_2}{\rho_1 v_1 S_1} = \frac{1}{20} \Rightarrow \rho_2 = \frac{21}{20} \rho_1 \frac{v_1 S_1}{v_2 S_2} = 0{,}181\ Kg/m^3$$

A questo punto applichiamo un bilancio di quantità di moto:

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint \left(p \underline{\underline{I}} + \rho \underline{v}\,\underline{v} \right) \cdot \underline{n}\, dS + \int \cancel{\rho \underline{g}}\, dV$$

trascurabile per gas

Inoltre $\frac{dQ}{dt} = 0$ xK flusso stazionario

$$0 = -\int_{S_1} p_1 \underline{u}_1 \, dS - \int_{S_1} \rho_1 \underline{v}_1 \underline{v}_1 \cdot \underline{u}_1 \, dS - \int_{S_2} p_2 \underline{u}_2 \, dS - \int_{S_2} \rho_2 \underline{v}_2 \underline{v}_2 \cdot \underline{u}_2 \, dS - \int_{S_3} p_3 \underline{u}_3 \, dS - \int_{S_3} \rho \underline{v}_3 \underline{v}_3 \cdot \underline{u}_3 \, dS$$

È proprio la forza esercitata dal fluido

Fluido non attraversa parete: $v_3 \perp u_3 \Rightarrow \int = 0$

$$\underline{F} = -p_1 \underline{u}_1 S_1 + \rho_1 \underline{v}_1 v_1 S_1 - p_2 \underline{u}_2 S_2 - \rho_2 \underline{v}_2 v_2 S_2$$

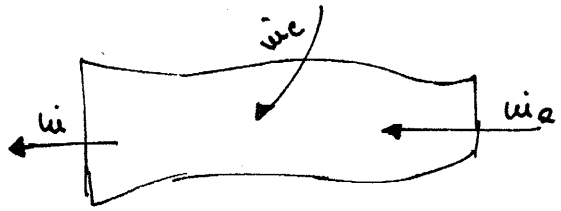
Poiché ragioniamo in termini di pressioni relative, $p_1 = 0$ $p_2 = 10000 \text{ Pa}$.

$$\underline{F} = \rho_1 \underline{v}_1 v_1 S_1 - p_2 \underline{u}_2 S_2 - \rho_2 \underline{v}_2 v_2 S_2$$

$$\to F_x = -\rho_1 v_1^2 S_1 + p_2 S_2 + \rho_2 v_2^2 S_2 = 16534 \text{ N}$$

$$\to F_y = 0$$

$\boxed{\text{Ulteriore modo di calcolare } \rho_2 \ (+ \text{ semplice})}$ (senza passare direttamente dal bilancio)



Sappiamo che la portata massica finale uscente dal reattore è uguale alla portata massica di aria entrante da S_1 + portata massica combustibile che si brucia. Sappiamo inoltre che esse sono in rapporto di 1:20, cioè $\frac{\dot{m}_c}{\dot{m}_a} = \frac{1}{20}$

$$\dot{m}_i = \dot{m}_c + \dot{m}_a$$

$\dot{m}_i = \rho_2 v_2 S_2$

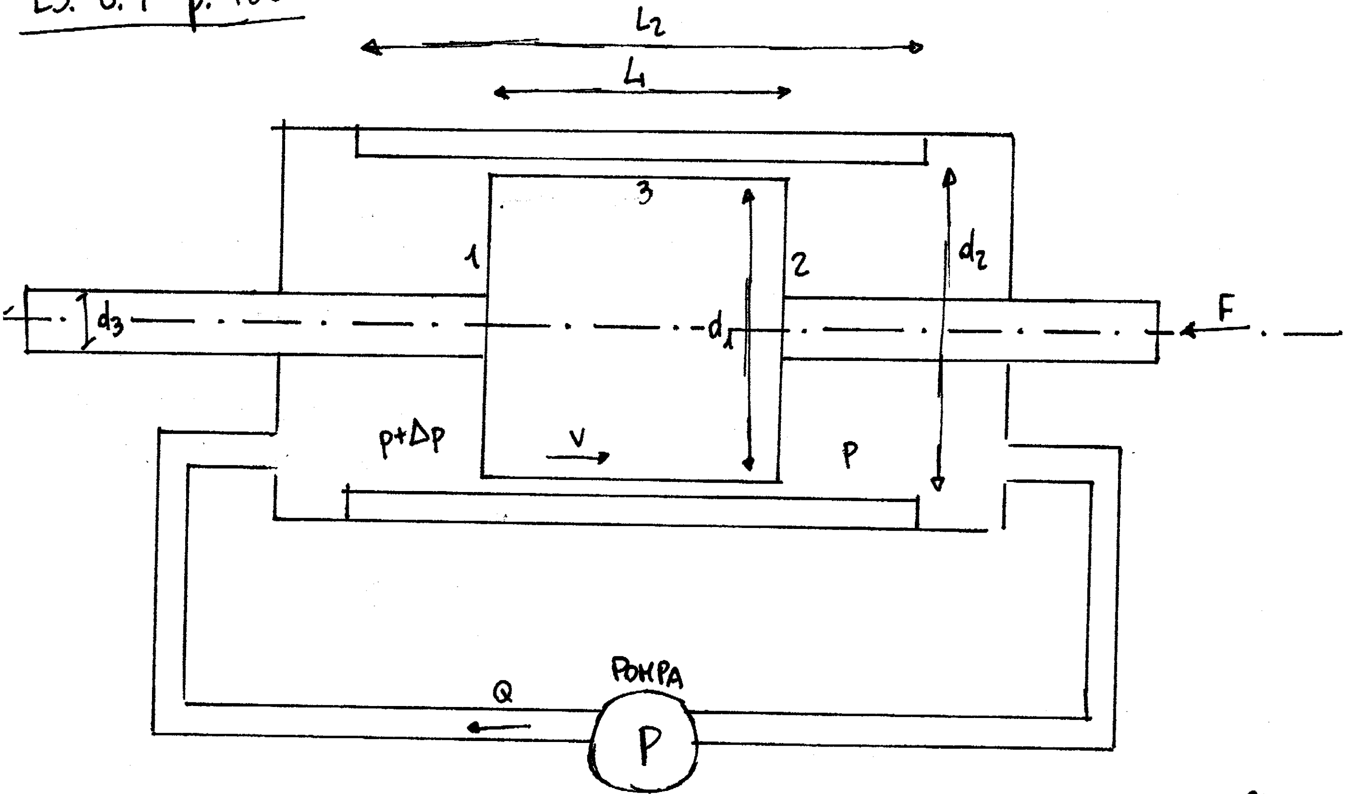
$\dot{m}_a = \rho_1 v_1 S_1$

$\dot{m}_c = \frac{1}{20} \dot{m}_a = \frac{\rho_1 v_1 S_1}{20}$

$$\rho_2 v_2 S_2 = \frac{21}{20} \rho_1 v_1 S_1$$

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 v_1 S_1}{v_2 S_2} \frac{21}{20} = 0{,}181 \text{ Kg/m}^3$$

Es. 6.9 p. 183



Obiettivo: calcolo Δp (press. trasmessa al cilindro)
Q (portata dell'olio della pompa)

$$\frac{d_2-d_1}{d_1} \ll 1$$ (flusso può essere visto tra lastre parallele)

Dati conosciuti: d_1, d_2, L_1, L_2, v, F

Inoltre sappiamo che:

$L_2 - L_1$ = corsa pistone

Δt = tempo x 1 corsa

Sappiamo che la forza applicata al pistone si compone di:

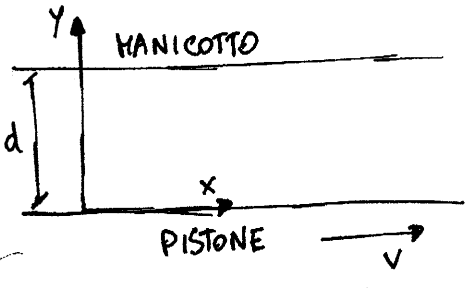
$$\underline{F} = \underline{F_{S_1}} + \underline{F_{S_2}} + \underline{F_{S_3}}$$

- $\underline{F_{S_1}}$ → Forza applicata alla base 1: $(p+\Delta p)\, S_1$ verso destra
- $\underline{F_{S_2}}$ → Forza applicata alla base 2: $p\, S_2$ verso sinistra
- $\underline{F_{S_3}}$ → Forza applicata alla superficie laterale → Causa: sforzo di taglio dell'olio in moto da 2 a 1

$F = \tau S_3$ verso destra (da p maggiore a p minore)

In realtà, è un flusso tra due cilindri coassiali

Analizziamo dunque il moto tra pistone e manicotto, come tra due lastre parallele:



Cause del moto:

- v pistone
- p_x → dato da $\frac{p_2-p_1}{L_1} = -\frac{\Delta p}{L_1} = p_x$

Moto combinato di Poiseulle e Couette:

$$u(y) = \frac{p_x}{\mu}\frac{y^2}{2} + Ay + B$$ con $u(d)=0$, $u(0)=v$

$$u(0) = B = v$$

$$u(d) = \frac{p_x}{\mu}\frac{d^2}{2} + Ad + v = 0 \rightarrow A = -\frac{\left(v + \frac{p_x}{\mu}\frac{d^2}{2}\right)}{d}$$

$$u(y) = \frac{p_x}{2\mu}y^2 - \frac{\left(v + \frac{p_x}{\mu}\frac{d^2}{2}\right)}{d}y + v \qquad \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = \left[\frac{p_x}{\mu}y - \frac{\left(v + \frac{p_x}{\mu}\frac{d^2}{2}\right)}{d}\right]_{y=0} = -\frac{v}{d} - \frac{p_x d}{2\mu}$$

$$\tau = \mu \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = -\left(\frac{v\mu}{d} + \frac{p_x d}{2}\right) \qquad \text{con } d = \frac{d_2 - d_1}{2}$$

questi sono i moduli, i segni rappresentano i versi

Ritornando all'espressione della forza: $F = (p + \Delta p)S_1 - p S_2 - \left(\frac{v\mu}{d} + \frac{p_x d}{2}\right)S_3 =$ con $S_1 = S_2$

$$= \Delta p\, S_1 - \left(\frac{v\mu}{d} + \frac{p_x d}{2}\right)S_3 = F$$

$\longrightarrow$ possiamo calcolare Δp:

$$\Delta p = \frac{F + \left(\frac{v\mu}{d} + \frac{p_x d}{2}\right)S_3}{S_1}$$

con $p_x = -\frac{\Delta p}{L_1}$

$S_3 = \pi d_1 L_1$

$S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$

(trascuriamo l'area occupata dall'albero)

Per calcolare la portata volumetrica effettuiamo un bilancio di massa sul volume a sinistra del pistone:

$$\frac{d}{dt}\int \rho\, dV = -\oint \rho \underline{v}\cdot\underline{n}\, dS \qquad \text{eliminiamo } \rho: \qquad \frac{dV}{dt} = -\int_A \underline{v}_A\cdot\underline{n}_A\, dS - \int_B \underline{v}_B\cdot\underline{n}_B\, dS$$

$\frac{dV}{dt}$ = variazione del volume di controllo, dovuta allo spostamento del pistone $= S_1 v$

Di tutta la superficie del V.C. rimane solo:
A sezione d'ingresso pompa
B sezione anulare tra pistone e manicotto

in A: v e n antiparalleli

$$-\int_A \underline{v}_A\cdot\underline{n}_A\, dS = v_A S_A = Q_p$$

in B: v e n paralleli

$$-\int_B \underline{v}_B\cdot\underline{n}_B\, dS = -\int_B v_B\, dS = -\int_B u(y)\, dS = -\bar{u}\, S_B$$

vel. media

$\bar{u}$ può essere calcolato con approssimazione lastre parallele:

$$\bar{u} = \frac{1}{d}\int_0^d u(y)\,dy = \frac{1}{d}\left(\frac{p_x}{2\mu}\frac{d^3}{3} - \frac{\left(v + \frac{p_x}{\mu}\frac{d^2}{2}\right)}{d}\frac{d^2}{2} + vd\right) = \frac{p_x}{2\mu}\frac{d^2}{3} - \frac{v}{2} - \frac{p_x}{4\mu}d^2 + v = -\frac{p_x}{12\mu}d^2 + \frac{v}{2}$$

Riscriviamo il bilancio di massa:

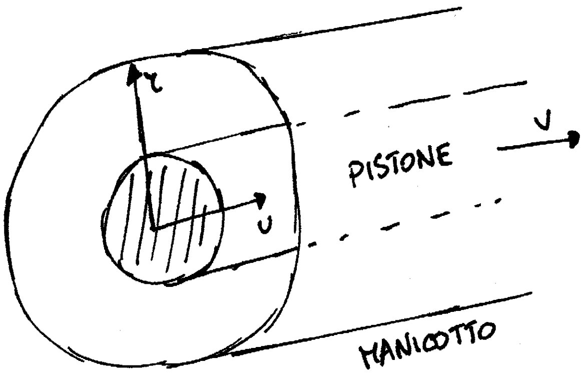
$$\frac{dV}{dt} = -\int_A \underline{v}_A \cdot \underline{u}_A \, dS - \int_B \underline{v}_B \cdot \underline{u}_B \, dS$$

$$vS_1 = Q_p - \bar{v} S_B \implies Q_p = vS_1 + \left(\frac{v}{2} - \frac{p_x}{12\mu} d^2 \right) \underbrace{\left(\frac{\pi d_2^2}{4} - \frac{\pi d_1^2}{4} \right)}$$

Anello tra pistone e manicotto

Es. 6.10 p. 184

Il problema è lo stesso di prima, ma ora effettuiamo lo studio del moto tra pistone e manicotto come tra cilindri coassiali.



Moto solo lungo v:

$$v(r) = C_1 \log r + \frac{p_x}{\mu} \frac{r^2}{4} + C_2$$

Cond. contorno $\quad v(r_2) = v\left(\frac{d_2}{2}\right) = 0$

$$v(r_1) = v\left(\frac{d_1}{2}\right) = v$$

con $p_x = -\frac{\Delta p}{L_1}$

$$v(r_2) = C_1 \log r_2 + \frac{p_x}{\mu} \frac{r_2^2}{4} + C_2 = 0$$

$$v(r_1) = C_1 \log r_1 + \frac{p_x}{\mu} \frac{r_1^2}{4} + C_2 = v$$

$$C_1 \log r_2/r_1 + \frac{p_x}{4\mu}\left(r_2^2 - r_1^2\right) = -v \longrightarrow C_1 = -\frac{v + \frac{p_x}{4\mu}\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{\log r_2/r_1}$$

$$C_2 = \frac{v + \frac{p_x}{4\mu}\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{\log r_2/r_1} \log r_2 - \frac{p_x}{4\mu} r_2^2$$

Calcoliamo $\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=r_1} = \left[\frac{C_1}{r} + \frac{p_x}{2\mu} r \right]_{r=r_1} = \frac{C_1}{r_1} + \frac{p_x}{2\mu} r_1$

Calcoliamo $\bar{v}$ che, come abbiamo visto nel problema precedente, ci servirà alla fine:

$$\bar{v} = \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} v(r) 2\pi r \, dr = \frac{2}{(r_2^2 - r_1^2)} \left[\frac{C_1}{4} r^2 (2\log r - 1) + \frac{p_x}{16\mu} r^4 + \frac{C_2}{2} r^2 \right]_{r_1}^{r_2}$$

Volendo ricalcolare Δp e Q_p, avremo:

$$\Delta p = \frac{F - \tau S_3}{S_1} = \frac{F - \left(\frac{C_1 \mu}{r_1} + \frac{p_x r_1}{2}\right) S_3}{S_1}$$

con $S_3 = \pi d_1 L_1$
$S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$

$Q_p = v S_1 - \bar{u} S_B = \dots$ espressioni molto lunghe, inutile scriverle perché saranno svolte numericamente dopo

Es. 6.11 p. 184

Dati numerici: $d_1 = 0{,}06$ m, $L_1 = 0{,}08$ m, $d_2 = 0{,}063$ m, $L_2 = 0{,}120$ m, $\mu = 2$ Pa s, $\Delta t = 5$ s, $d_3 = 0{,}01$ m, $F = 2000$ N

$$\frac{\pi d_1^2}{4} - \frac{\pi d_3^2}{4}$$
$\|$

[Calcoliamo Δp e Q_p per problema 6.9]

$$\Delta p = \frac{F + \left(\frac{v\mu}{d} + \frac{p_x d}{2}\right) S_3}{S_1}$$

$F = +2000$ N
$\Delta p = x$

$S_1 = 2{,}75 \cdot 10^{-3}\ m^2$
$S_3 = 0{,}015\ m^2$

$v = \frac{L_2 - L_1}{\Delta t} = 8 \cdot 10^{-3}\ \frac{m}{s}$

$d = \frac{d_2 - d_1}{2} = 1{,}5 \cdot 10^{3}$ m

$$x = \frac{+2000}{2{,}75 \cdot 10^{-3}} + 58{,}1 - x \cdot 0{,}05$$

$$x = 693 \cdot 10^3 \text{ Pa} \simeq 6{,}9 \text{ bar} = \Delta p$$

$$Q_p = v S_1 + \left(\frac{v}{2} - \frac{p_x}{12\mu} d^2\right) \frac{\pi}{4}\left(d_2^2 - d_1^2\right) = 2{,}2 \cdot 10^{-5} + 0{,}79\ \frac{\pi}{4}\left(3{,}69 \cdot 10^{-4}\right) = 2{,}52 \cdot 10^{-4}\ \frac{m^3}{s}$$

[Calcoliamo Δp e Q_p per problema 6.10]

$$\Delta p = \frac{F}{S_1} - \left(\frac{\frac{C_1 \mu}{r_1}}{S_1} + \frac{\left(-\frac{\Delta p}{L_1}\right)\frac{r_1}{2}}{S_1}\right) S_3 = 727272 + (3879 - \Delta p\, 71{,}5 + \Delta p\, 68{,}2) S_3 =$$

$$= 727272 + 58{,}2 - \Delta p \cdot 0{,}05 = \Delta p$$

$C_1 = C_1(\Delta p) = -0{,}16 + \Delta p \cdot 2{,}95 \cdot 10^{-3}$

$\hookrightarrow \Delta p = 692694$ Pa $= 6{,}7$ bar

$\Downarrow$

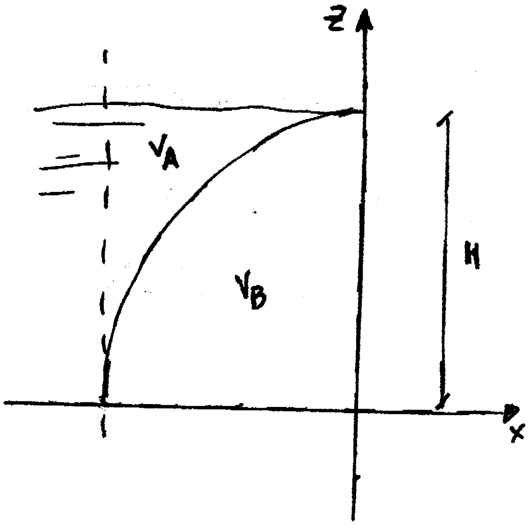
$C_1 = 158{,}9$

Calcoliamo $\bar{u}$ (direttamente numericamente):

$\bar{u} = 3451 \left[-289 + 2{,}4 - (-276)\right] =$ esce negativa!!!

$C_2 = 633$

Esempio 3.10 - A



Ampiezza = profondità = 1m
$H = 4m$

$F = ?$
p. applicazione = ?
Momento = ?

Abbiamo a che fare con una superficie qualsiasi. Calcoliamo le componenti di F lungo x, y, z.

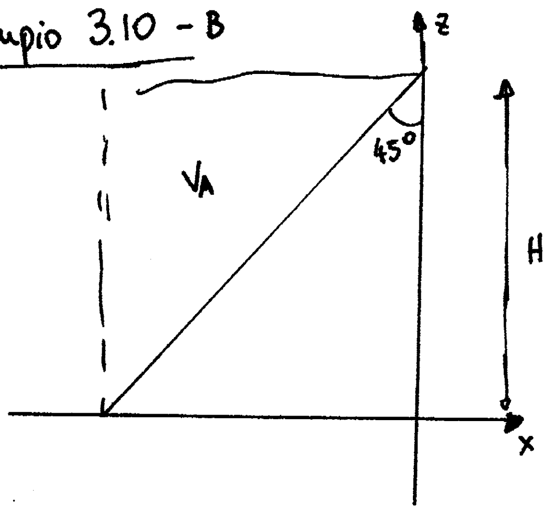
- $F_x = \rho g (z_0 - z_b) S = \rho g \frac{H}{2} S = \rho g \frac{H}{2} HL = \rho g/2 \; H^2 L = 78480 \text{ N}$

(proiettiamo, poi b = baricentro proiezione, S superficie proiezione)

- $F_y = 0$ (non vi è acqua in questa direzione)
- $F_z = \int \rho g (z_0 - z)\, dx\, dy = \rho g V_A = \rho g (V_{TOT} - V_B) = \rho g \left(H^2 L - \frac{\pi H^2}{4} L \right) = 33684 \text{ N}$

$$F_{TOT} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 85403 \text{ N}$$

Esempio 3.10 - B



$H = 4m$ $L = (\text{prof.}) = 1m$

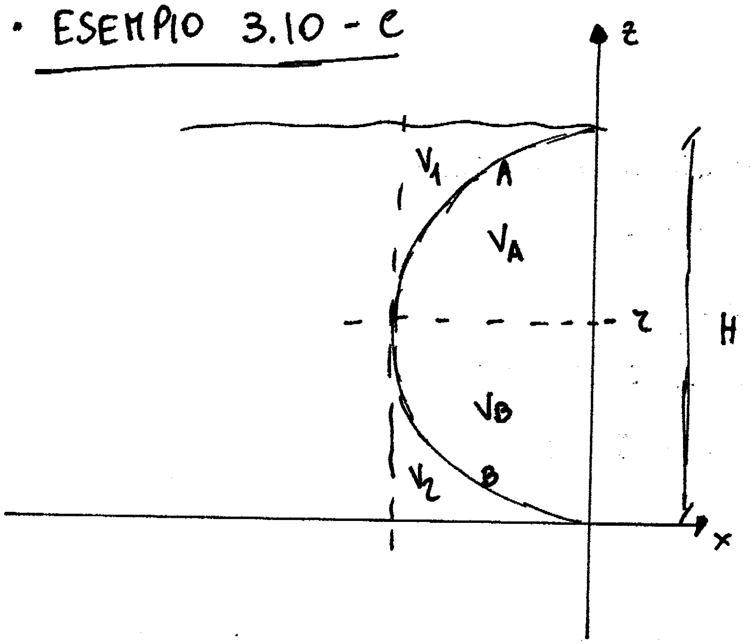
$F = ?$

Stesso procedimento di prima:

- $F_x = \rho g (z_0 - z_b) S = 78480 \text{ N}$
- $F_z = \rho g V_A = \frac{\rho g}{2} V_{TOT} = \frac{\rho g}{2} H^2 L = 78480 \text{ N}$
- $F_y = 0$

- $F_{TOT} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 110986 \text{ N}$

• ESEMPIO 3.10 - C



$H = 4\,m \quad L = 1\,m$

Stesso procedimento di prima:

- $F_x = \rho g (z_0 - z_b) S =$
  $= \rho g \frac{H}{2} H L = 78480\ N$

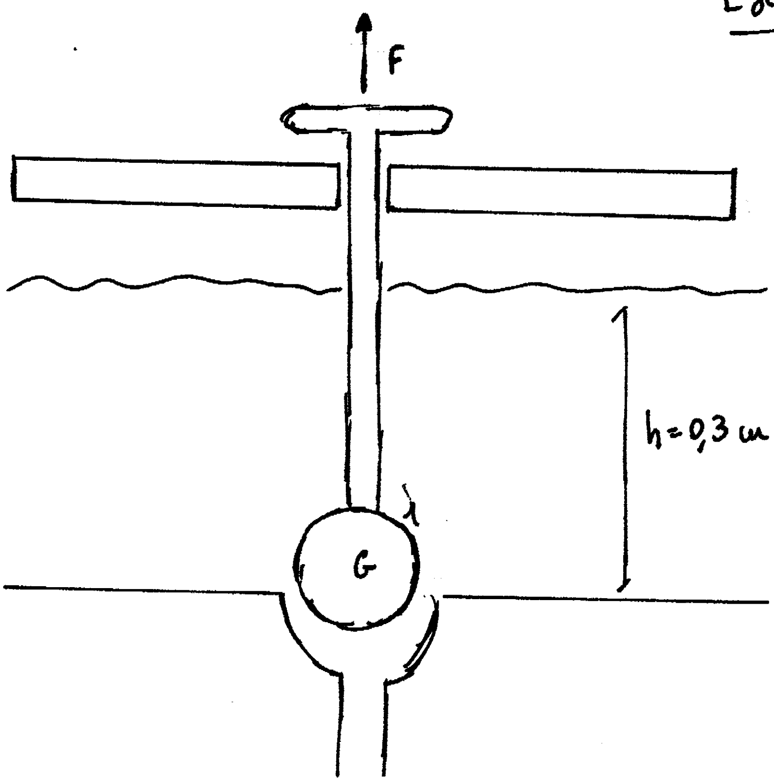
- $F_y = 0$

- $F_z \rightarrow$ poiché abbiamo una superficie chiusa, la dividiamo lungo la retta r → la sup. A ci dà una spinta verso il basso pari a $\rho g V_1$
  → la sup. B ci dà una spinta verso l'alto pari a $\rho g (V_1 + V_A + V_B)$

La F_z risultante è: $F_B - F_A = \rho g (V_A + V_B) = \rho g \frac{\pi H^2}{8} L = 61638\ N$

$F_{TOT} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 99792\ N$

Esempio 3.11

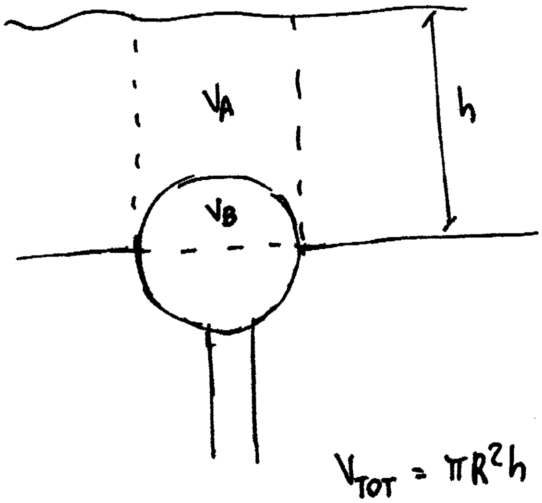


1: → peso G
→ raggio R

$h = 0{,}3\ m$

$R = 0{,}03\ m$

Calcoliamo pressione dell'acqua quando la valvola è nella sua sede



Caso di superficie qualsiasi:

- $F_x = F_y = 0$
  (forze equilibrate rispetto agli assi di simmetria)
- $F_z = \rho g V_A = \rho g (V_{TOT} - V_B) = 7{,}77\ N$

$V_{TOT} = \pi R^2 h$

$V_B = \frac{2}{3}\pi R^3$

Forza esercitata dall'acqua: $7{,}77\ N$

Per determinare massimo valore di G, dobbiamo avere che $\rho_A > \rho_g$, x il corretto funzionamento:

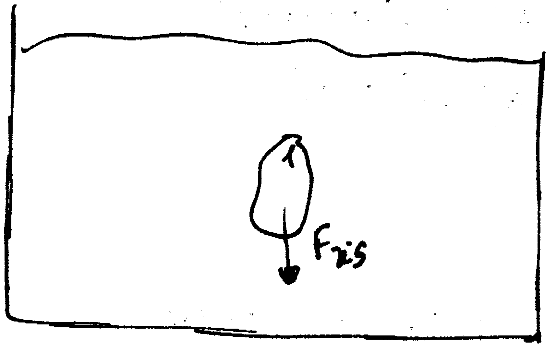
$$\rho_g = \frac{m_g}{V_g} = \frac{G}{g V_g} \rightarrow \rho_A > \frac{G}{g V_g}$$

$$G < \rho_A g V_g = \rho_A g \frac{4}{3}\pi R^3 = 1{,}11\ N$$

Affinché in queste condizioni, F_{est} riesca a muovere galleggiante, avremo che:

$$F_{est} > G + F_{acqua} = 8{,}88\ N$$

ES. 3.8



$m_1 = (75+50)\ Kg = 125\ Kg$
$V_1 = 0{,}085\ m^3$

$g' = 1{,}64\ m/s^2$
$g = 9{,}81\ m/s^2$

$\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} = 1470{,}6\ Kg/m^3 > \rho_A$ Il corpo affonda

$F_{risultante} = P - P_A = m_1 g - \rho_A V_1 g = (m_1 - \rho_A V_1) g = 392{,}4\ N$

Affinchè ci sia sulla luna, $F_{risultante} = m g'$

$392{,}4 > 125 \cdot 1{,}64 = 205$

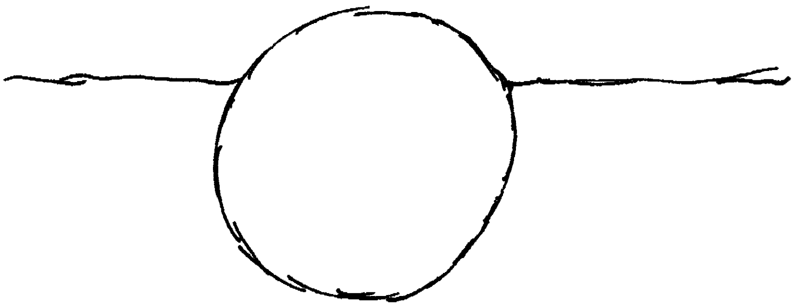
Devono essere equipaggiati con galleggianti in modo da diminuire F_{ris} e uguagliare peso lunare

ES. 3.9

- $T_i = -10°C$ $\rho_i = 998{,}15\ Kg/m^3$
- Iceberg sferico di 1000 ton galleggia in mare

Altezza iceberg fuori dall'acqua?

mare = acqua salata $\rightarrow \rho_A = 1025\ Kg/m^3$



Sull'iceberg agiscono 2 forze
- P Forza peso
- P_A Spinta Archimede

Affinchè ci sia equilibrio:

$P = P_A$

$mg = P_A = 9810000\ N$

Calcoliamo quanta acqua è necessaria a generare questa Spinta di Archimede.

$$P_A = \rho_A V_A g = 9810000\ N$$
$$V_A = 975,6\ m^3$$

L'iceberg ha un volume pari a $V_i = \frac{m_i}{\rho_i} = 1001,9\ m^3$

l'iceberg deve essere immerso per 975,6 m³ affinchè ci sia equilibrio di galleggiamento.

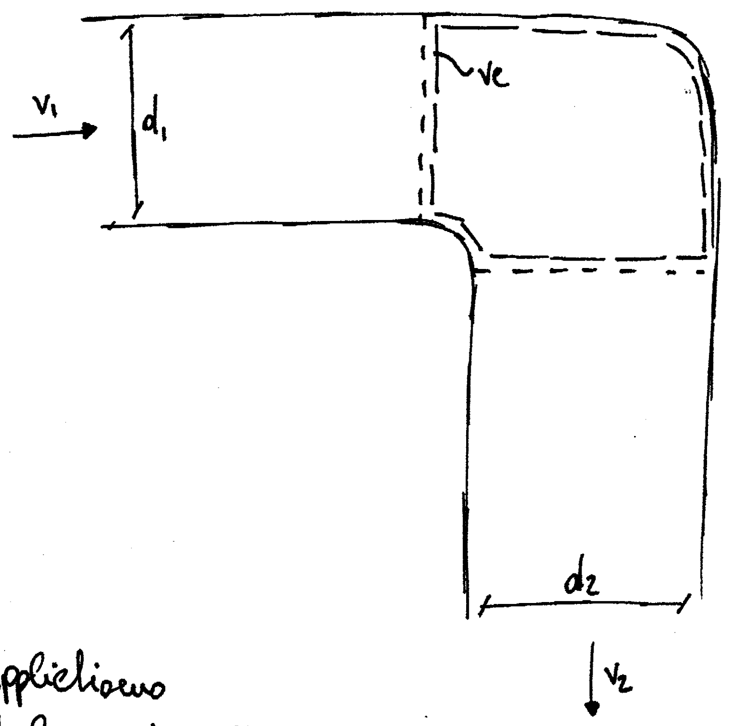
Fuoriesce quindi un volume di: $1001,9 - 975,6 = 26,3\ m^3$

Questo volume occupa la parte + alta della sfera, occupando una calotta sferica in superficie.

Il volume di una calotta è dato da:

$$V = \pi \left[R^2 h + \frac{(R-h)^3}{3} - \frac{R^3}{3} \right] = 26,3\ m \implies h = 1,2\ m$$

Es. 4.5



$v_1 = 5\ m/s$

$p_1 = 3{,}375 \cdot 10^5\ Pa$

$p_2 = 1{,}5 \cdot 10^5\ Pa$

$d_1 = 0{,}1\ m$

$d_2 = 0{,}05\ m$

m nella curvatura = 4 Kg

F sulla parete = ?

Scegliamo V.C. = Volume di acqua compresa tra le due flange della curvatura del tubo

$\downarrow$

∂ V.C. può essere diviso in 3 parti:
- S_1 sezione d'ingresso
- S_2 sezione di uscita
- S_3 parete del tubo

Applichiamo bilancio di massa

$$\frac{d}{dt}\int \rho \, dv = -\oint \rho \underline{v} \cdot \underline{u} \, dS$$

poichè siamo in regime stazionario $\frac{d}{dt}\int \rho \, dv = 0$

e scomponiamo $\oint$ in $\int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_3}$

$$\int_{S_1} \rho \underline{v}_1 \cdot \underline{u}_1 dS + \int_{S_2} \rho \underline{v}_2 \cdot \underline{u}_2 dS + \int_{S_3} \rho \underline{v}_3 \cdot \underline{u}_3 dS = 0$$

- poichè S_3 è una parete solida, $\underline{v}_3 \perp \underline{u}_3 \Rightarrow \underline{v}_3 \cdot \underline{u}_3 = 0$

$$\Downarrow$$

$$\int_{S_3} = 0$$

- inoltre $\underline{v}_1 \cdot \underline{u}_1 = -v_1$
  $\underline{v}_2 \cdot \underline{u}_2 = v_2$

$$-\rho v_1 S_1 + \rho v_2 S_2 = 0$$

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 = 20\ m/s$$

Applichiamo bilancio quantità di moto

$$\frac{d}{dt}\int \rho \underline{v} \, dv = -\oint \left(p \underline{\underline{I}} + \rho \underline{v}\underline{v}\right) \cdot \underline{u} \, dS + \int \rho \underline{g} \, dv$$

- flusso stazionario: $\frac{d}{dt}\int \rho \underline{v} \, dv = 0$
- $\rho \underline{g}$ costante: $\int \rho \underline{g} \, dv = m g$
- inoltre scomponiamo integrale superficiale

$$0 = -\int_{S_1} \left(p_1 \underline{\underline{I}} + \rho \underline{v_1}\underline{v_1}\right)\cdot \underline{u_1}\, dS - \int_{S_2} \left(p_2 \underline{\underline{I}} + \rho \underline{v_2}\underline{v_2}\right)\cdot \underline{u_2}\, dS - \int_{S_3} \left(p_3 \underline{\underline{I}} + \rho \underline{v_3}\underline{v_3}\right)\cdot \underline{u_3}\, dS + m\underline{g}$$

$$\underset{A}{-p_1 \underline{u_1} S_1} + \underset{B}{\rho \underline{v_1}(v_1) S_1} \underset{A}{- p_2 \underline{u_2} S_2} \underset{C}{- \rho \underline{v_2}(v_2) S_2} \underset{D}{- \int_{S_3} p_3 \underline{u_3}\, dS} \underset{E}{- 0} + m\underline{g} = 0$$

A $-\int_{S_1} p_1 \underline{\underline{I}} \cdot \underline{u_1}\, dS = -\int_{S_1} p_1 \underline{u_1}\, dS = -p_1 \underline{u_1} S_1$

poiché $p_1 = cost$ su S_1 e lo stesso per u_1

C Stesso ragionamento di B ma $\underline{v_2} \cdot \underline{u_2} = v_2$

B $-\int_{S_1} (\rho \underline{v_1}\underline{v_1})\cdot u_1\, dS = -\int_{S_1} \rho \underline{v_1} (\underline{v_1} \cdot u_1)\, dS = +\int_{S_1} \rho \underline{v_1} v_1\, dS = \rho \underline{v_1} v_1 S_1$

$\underline{v_1} \cdot \underline{u_1} = -v_1$ poiché v_1 cost su S_1

D E' proprio la forza esercitata sulla parete

E Nullo poiché $v_3 \perp u_3$

$$-p_1 \underline{u_1} S_1 + \rho \underline{v_1} v_1 S_1 - p_2 \underline{u_2} S_2 - \rho \underline{v_2} v_2 S_2 - \underline{F} + m\underline{g} = 0$$

$$\underline{F} = -p_1 \underline{u_1} S_1 + \rho \underline{v_1} v_1 S_1 - p_2 \underline{u_2} S_2 - \rho \underline{v_2} v_2 S_2 + m\underline{g}$$

→ su x: $F_x = p_1 S_1 + \rho v_1^2 S_1 = 2845\, N$

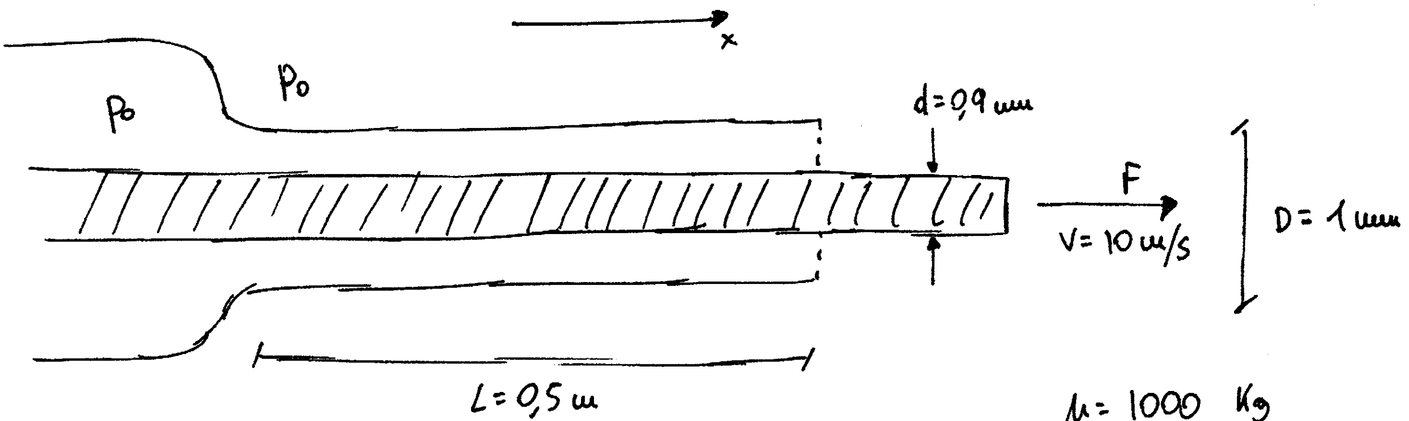
$u_1 = (-1, 0)$

$u_2 = (0, -1)$

→ su y: $F_y = p_2 S_2 + \rho v_2^2 S_2 - mg = 1040\, N$

$$|\underline{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 3029\, N$$

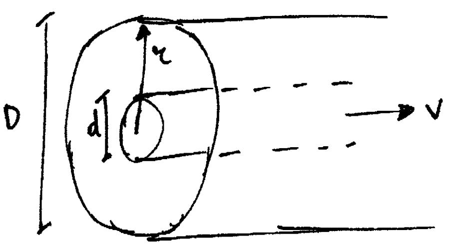
Es. 6.2 p. 181



$\mu = 1000 \ \frac{Kg}{ms}$

- Equazioni del moto semplificate
- Forza F

Il movimento descritto in figura può essere visto come il moto di un fluido (materiale di rivestimento) attraverso due cilindri coassiali, di cui l'esterno è fisso e l'interno si muove a $v=10$ m/s. Assumiamo inoltre che il moto sia solo lungo l'asse x.



$$u(r) = c_1 \log r + \frac{p_x}{\mu}\frac{r^2}{4} + c_2$$

b.c. $u(r_1) = u(0{,}45) = v$

$u(r_2) = u(0{,}5) = 0$

Attenzione alle unità di misura: o tutto mm o tutto m

$$\underset{\substack{\parallel \\ d/2}}{u(0{,}45\cdot 10^{-3} m)} = c_1 \cdot (-7{,}7) + \frac{p_x}{\mu}\frac{r^2}{4} + c_2 = 10$$

$$\underset{\substack{D/2 \\ \parallel}}{u(0{,}5\cdot 10^{-3} m)} = c_1 (-7{,}6) + \frac{p_x}{\mu}\frac{r^2}{4} + c_2 = 0$$

ATTENZIONE

Non vi è nessun gradiente di pressione: tutto a p_0

$$\frac{p_x}{\mu}\frac{r^2}{4} = 0$$

$$\begin{cases} c_2 = c_1 \cdot 7{,}6 & \longrightarrow c_2 = 760 \\ c_1(-7{,}7) + c_1(7{,}6) = 10 & \rightarrow c_1 = 100 \end{cases} \longrightarrow u(r) = 100 \log r + 760 \qquad r \in [4{,}5\cdot 10^{-4}, 5\cdot 10^{-4}]$$

La forza di trazione da applicare al filo serve per vincere lo sforzo di taglio applicato dal fluido al filo (che rappr. il cil. interno). Quindi:

$$\tau = \mu \left.\frac{du}{dr}\right|_{r=r_1} = \mu \frac{100}{r_1} = 222\cdot 10^{6} \text{ Pa} \longrightarrow F = F_{fluido} = \int_{\substack{\text{Area laterale} \\ \text{filo immersa nel fluido}}} \tau \, dS = \tau \pi d L = 314 \text{ KN}$$